

## Risoluzione II Appello di Settembre 2009

1. Pongo  $z = a + ib$ , si ha

$$z - z^2 = a + ib - a^2 + b^2 - 2abi.$$

Affinchè si abbiano soluzioni, essendo  $|z^2 + 1| \in \mathbb{R}$ , dobbiamo imporre che  $z - z^2 \in \mathbb{R}$ , ovvero che

$$b - 2ab = 0$$

da cui

$$b = 0 \text{ oppure } a = \frac{1}{2}.$$

Se  $b = 0$ , l'equazione diventa

$$|a^2 + 1| = a - a^2$$

ovvero (essendo  $a^2 + 1$  un numero reale strettamente positivo)

$$a^2 + 1 = a - a^2$$

e quindi

$$2a^2 - a + 1 = 0$$

che non ammette soluzioni. Se invece  $a = \frac{1}{2}$ , si ha

$$\begin{aligned} |z^2 + 1| &= \left| \frac{5}{4} - b^2 + ib \right| = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - b^2\right)^2 + b^2} \\ z - z^2 &= b^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Quindi l'equazione diventa

$$\left(\frac{5}{4} - b^2\right)^2 + b^2 = \left(b^2 + \frac{1}{4}\right)^2$$

da cui si ottengono le soluzioni

$$b_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione di partenza sono

$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

2. La serie è a segno alterno. Posto  $a_n = \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$  per ogni  $n \geq 1$ , si vede subito che

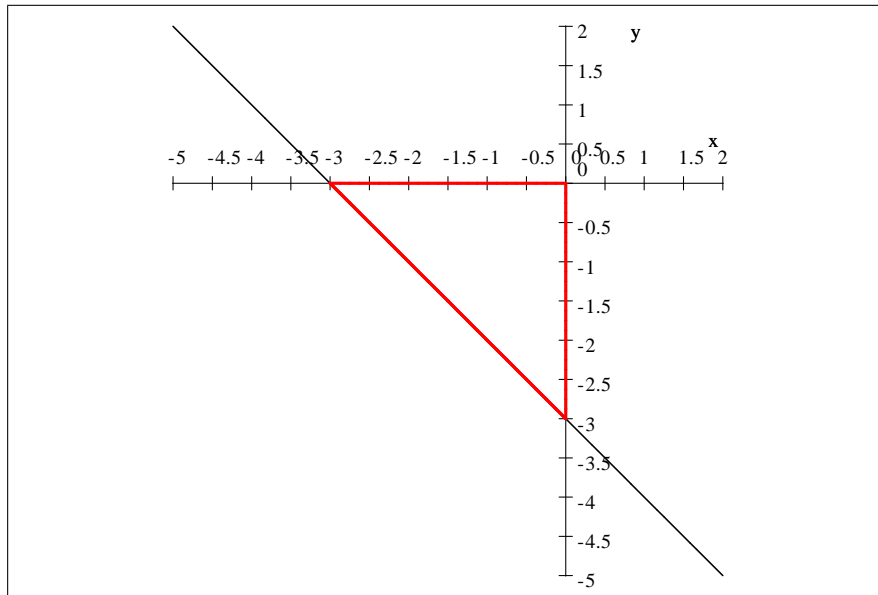
$$\lim_n a_n = 0.$$

Inoltre, essendo  $f(n) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$  composta di una funzione decrescente e di una crescente, si ha che  $(a_n)_{n \geq 1}$  è una successione decrescente, quindi la serie converge per il criterio di Leibniz. Studiamo ora l'assoluta convergenza, ovvero la convergenza della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Poichè

$$\lim_n \frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

per il criterio del confronto asintotico la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$  ha lo stesso carattere della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , cioè diverge positivamente. Quindi la serie di partenza non è assolutamente convergente.

3. L'insieme  $D$  considerato è la parte di piano delimitata dalle rette  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $x + y = -3$  come mostrato in figura



La funzione  $f$  è derivabile in  $D$ , inoltre per ogni  $(x, y) \in D$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x - y + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y - x + 1 \end{aligned}$$

Cerchiamo i punti stazionari di  $f$  interni a  $D$ , ovvero risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene come soluzione il punto  $P(-1, -1)$  che è interno a  $D$ . Studiamo la natura di questo punto. Per ogni  $(x, y) \in D$  calcoliamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

La matrice Hessiana di  $f$  nel punto  $O(0, 0)$  è data da

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante positivo. Quindi il punto  $P(-1, -1)$  è un punto di minimo per  $f$ . Inoltre  $f(P) = -1$ . Ora studiamo massimi e minimi di  $f$  sulla frontiera di  $D$ . Possiamo scrivere  $Fr(D) = D_1 \cup D_2 \cup D_3$  ove

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -3 \leq y \leq 0\} \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, -3 \leq x \leq 0\} \\ D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq 0, -3 \leq y \leq 0, x + y = -3\}. \end{aligned}$$

Consideriamo  $g_1 : [-3, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $g_1 = f|_{D_1}$ . Allora

$$\forall y \in [-3, 0] : g_1(y) = f|_{D_1}(x, y) = f(0, y) = y^2 + y$$

e si ha

$$\forall y \in [-3, 0] : g_1'(y) = 2y + 1$$

Quindi  $g_1$  è decrescente in  $[-3, -\frac{1}{2}]$  e crescente in  $[-\frac{1}{2}, 0]$ , quindi  $y = -\frac{1}{2}$  è un punto di minimo relativo per  $g_1$  e  $g_1(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$  è il minimo relativo per  $g_1$ . Inoltre agli estremi di  $[-3, 0]$  si ha che  $g_1(0) = 0$  e  $g_1(-3) = 6$ . Consideriamo  $g_2 : [-3, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $g_2 = f|_{D_2}$ . Allora

$$\forall x \in [-3, 0] : g_2(x) = f|_{D_2}(x, y) = f(x, 0) = x^2 + x$$

e si ha

$$\forall x \in [-3, 0] : g_2'(x) = 2x + 1$$

Quindi  $g_2$  è decrescente in  $[-3, -\frac{1}{2}]$  e crescente in  $[-\frac{1}{2}, 0]$ , quindi  $x = -\frac{1}{2}$  è un punto di minimo relativo per  $g_2$  e  $g_2(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$  è il minimo relativo per  $g_2$ . Inoltre agli estremi di  $[-3, 0]$  si ha che  $g_2(0) = 0$  e  $g_2(-3) = 6$ . Consideriamo infine  $g_3 : [-3, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $g_3 = f|_{D_3}$ . Allora

$$\forall x \in [-3, 0] : g_3(x, y) = f|_{D_3}(x, y) = f(x, -x - 3) = 3x^2 + 9x + 6$$

e si ha

$$\forall x \in [-3, 0] : g_3'(x) = 6x + 9$$

Quindi  $g_3$  è decrescente in  $[-3, -\frac{3}{2}]$  e crescente in  $[-\frac{3}{2}, 0]$  e si ha che  $x = -\frac{3}{2}$  è punto di minimo relativo per  $g_3$  e  $g_3(-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$  è il minimo relativo per  $g_3$ . Inoltre agli estremi di  $[-3, 0]$  si ha che  $g_3(0) = 6$  e  $g_3(-3) = 6$ . Pertanto i punti  $A(0, -3)$  e  $B(-3, 0)$  sono punti di massimo assoluto per  $f$  e 6 è il massimo assoluto per  $f$ , il punto  $P(-1, 1)$  è punto di minimo assoluto per  $f$  e  $-1$  è il minimo assoluto per  $f$ .

4. La forma differenziale  $\omega$  è definita in tutto  $\mathbb{R}^2$ , quindi per provare che è esatta mi basta provare che sia chiusa, cioè che

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}.$$

In questo caso per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} a_1(x, y) &= -y^2 e^{-xy^2} \\ a_2(x, y) &= -2xy e^{-xy^2}. \end{aligned}$$

Pertanto per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial y}(x, y) &= -2ye^{-xy^2} + 2xy^3 e^{-xy^2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x}(x, y) &= -2ye^{-xy^2} + 2xy^3 e^{-xy^2}. \end{aligned}$$

Essendo  $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}$ , si ha che la forma differenziale è chiusa e quindi è esatta. Cerco una sua primitiva. Consideriamo il punto  $O(0, 0)$ , un punto generico  $P(\bar{x}, \bar{y})$  e un cammino  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  che li congiunga, ove

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} & 0 \leq t \leq \bar{x} \\ \gamma_2 &: \begin{cases} x = \bar{x} \\ y = t \end{cases} & 0 \leq t \leq \bar{y} \end{aligned}$$

Integriamo la forma differenziale  $\omega$  lungo tale cammino:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\bar{x}} 0 dt + \int_0^{\bar{y}} -2\bar{x}t e^{-\bar{x}t^2} dt = \left[ e^{-\bar{x}t^2} \right]_0^{\bar{y}} = e^{-\bar{x}\bar{y}^2} - 1.$$

Pertanto la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = e^{xy^2} - 1$$

è una primitiva della forma differenziale  $\omega$ .