

Risoluzione I Appello di Settembre 2009

1. Pongo $z = a + ib$, si ha

$$\bar{z} = a - ib, |z|^2 = a^2 + b^2, z^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Quindi l'equazione diventa

$$(a - ib)(a^2 + b^2) = a^2 - b^2 + 2abi$$

ovvero

$$a^3 - ia^2b + ab^2 - ib^3 = a^2 - b^2 + 2abi$$

da cui, eguagliando parte reale e parte immaginaria, si ottiene

$$\begin{cases} a^3 + ab^2 = a^2 - b^2 \\ -a^2b - b^3 = 2ab \end{cases}$$

che si sdoppia nei due sistemi

$$(1) \begin{cases} a^3 + ab^2 = a^2 - b^2 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (2) \begin{cases} a^3 + ab^2 = a^2 - b^2 \\ a^2 + b^2 + 2a = 0 \end{cases}.$$

Il sistema (1) diventa

$$\begin{cases} a^3 - a^2 = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} a^2(a - 1) = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

che mi dà le soluzioni $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$. Consideriamo ora il sistema (2). La seconda equazione è $b^2 = -2a - a^2$ che ovviamente non ha soluzione se $-2a - a^2 < 0$, cioè per $a < -2$ oppure per $a > 0$. Per $-2 \leq a \leq 0$, invece, il sistema diventa

$$\begin{cases} a^3 - 2a^2 - a^3 - a^2 - 2a - a^2 = 0 \\ b^2 = -2a - a^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2a^2 + a = 0 \\ b^2 = -2a - a^2 \end{cases}$$

che a sua volta si sdoppia nei sistemi

$$(2)' \begin{cases} a = 0 \\ b^2 = -2a - a^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad (2)'' \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b^2 = -2a - a^2 \end{cases}$$

Il sistema (2)' mi dà di nuovo la soluzione $z_1 = 0$. Il sistema (2)'' diventa

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

e mi dà quindi le soluzioni $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. La funzione è definita quando

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$

ovvero per ogni x reale. Quindi l'insieme di definizione di f è $X_f = \mathbb{R}$. Innanzitutto osserviamo che la funzione f è definita in $X_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si vede facilmente che la funzione è dispari. Le intersezioni con gli assi sono ridotte solo al punto $A(0,0)$. La funzione è sempre continua, quindi non ci sono asintoti verticali. Inoltre è positiva quando

$$0 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$

ovvero per $x \geq 0$. Calcoliamo gli eventuali asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 0$$

La funzione f ha quindi la retta $y = 0$ come asintoto orizzontale. La funzione f è sicuramente derivabile per tutte le x tali che

$$\frac{2x}{1+x^2} \neq \pm 1$$

ovvero per $x \neq \pm 1$. Inoltre nell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)},$$

ovvero

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{se } x < -1 \text{ oppure } x > 1 \end{cases} .$$

Vediamo cosa succede nei punti che abbiamo escluso:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\frac{2}{1+x^2}\right) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{1+x^2} = 1$$

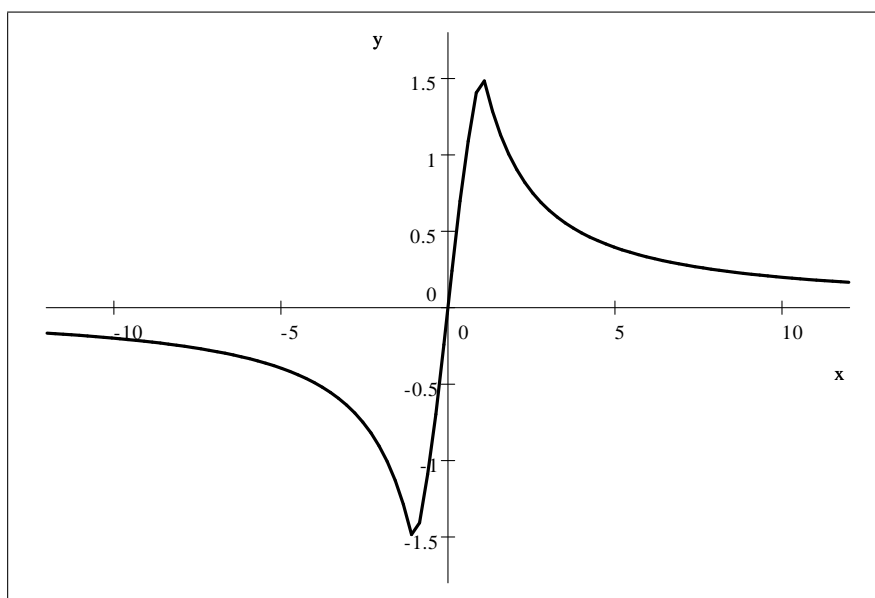
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{1+x^2} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{2}{1+x^2}\right) = -1$$

Si tratta quindi di due punti angolosi. Ora studiamo il segno della derivata prima. Si nota facilmente che la funzione è crescente in $] -1, 1[$ e decrescente in $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$. Quindi $x = -1$ è un punto di minimo relativo

(anzi, assoluto) per f e $x = 1$ è un punto di massimo relativo (anzi, assoluto) per f . La funzione è derivabile 2 volte in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ e in tale insieme

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{se } x < -1 \text{ oppure } x > 1 \end{cases}$$

Allora, studiando il segno della derivata seconda della funzione, si ha che f è convessa in $] -1, 0[$ e $]1, +\infty[$ e concava in $] -\infty, -1[$ e $]0, 1[$. Quindi $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ sono punti di flesso per f . Tracciamo infine un grafico approssimativo della funzione:



3. L'insieme considerato è

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$$

che in coordinate polari possiamo scrivere

$$D' = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \mid 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

che è un dominio normale sia rispetto a ρ che a θ . Si ha quindi che

$$\begin{aligned}
 \int \int_D y^2 \log(1-x^2-y^2) dx dy &= \int \int_{D'} \rho^2 \sin^2 \theta \log(1-\rho^2) \rho d\rho d\theta = \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2 \theta \log(1-\rho^2) d\theta \right) d\rho = \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \rho^3 \log(1-\rho^2) \left(\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \right) d\rho = \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \rho^3 \log(1-\rho^2) \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} d\rho = \\
 &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \rho^3 \log(1-\rho^2) d\rho = \\
 &= \pi \left[\frac{\rho^4}{4} \log(1-\rho^2) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\rho^5}{\rho^2-1} d\rho = \\
 &= \frac{\pi}{64} \log \frac{3}{4} - \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4} [\log(\rho^2-1)]_0^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{\pi}{64} \log \frac{3}{4} - \frac{\pi}{128} - \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{8} \log \frac{3}{4} = -\frac{7}{64} \pi \log \frac{3}{4} - \frac{9}{128} \pi.
 \end{aligned}$$

4. L'equazione differenziale

$$y''' - 2y'' + 5y' = 0$$

è del terzo ordine omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica ad essa associata è

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda = 0$$

che ha come soluzioni

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 + 4i, \lambda_3 = 1 - 4i.$$

Gli integrali indipendenti ad esse associate sono le funzioni

$$1, e^x \cos(4x), e^x \sin(4x).$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione è

$$y = c_1 + c_2 e^x \cos(4x) + c_3 e^x \sin(4x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 y' &= c_2 e^x \cos(4x) + c_3 e^x \sin(4x) - 4c_2 e^x \sin(4x) + 4c_3 e^x \cos(4x) \\
 y'' &= -8c_2 e^x \sin(4x) - 15c_2 e^x \cos(4x) - 15c_3 e^x \sin(4x) + 8c_3 e^x \cos(4x)
 \end{aligned}$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali, cioè

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

ovvero risolviamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + 4c_3 = 1 \\ 8c_3 - 15c_2 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$c_1 = -\frac{2}{17}, c_2 = \frac{2}{17}, c_3 = \frac{15}{68}.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = -\frac{2}{17} + \frac{2}{17}e^x \cos(4x) + \frac{15}{68}e^x \sin(4x).$$