Risoluzione I Appello di Luglio 2009

1. Pongo $\omega = \bar{z} + i$ e risolvo $\omega^2 = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^2$. In forma trigonometrica
$$\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
e applicando la formula di De Moivre si ha
$$\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$
Allora le radici quadrate sono
$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}\\ \omega_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\end{aligned}$$
Pertanto si ha
$$\begin{aligned}\bar{z}_0 &= \omega_0 - i = \sqrt{2} + i\left(\sqrt{2} - 1\right)\\ \bar{z}_1 &= \omega_1 - i = -\sqrt{2} - i\left(\sqrt{2} + 1\right)\end{aligned}$$
da cui le soluzioni dell'equazione di partenza sono date da
$$\begin{aligned}z_0 &= \sqrt{2} + i\left(1 - \sqrt{2}\right)\\ z_1 &= -\sqrt{2} + i\left(\sqrt{2} + 1\right)\end{aligned}$$

2. Per ogni $n \geq 1$ si ha che
$$\frac{(n+3)! - n!}{n^2(n+1)!} = \frac{n!((n+3)(n+2)(n+1) - 1)}{n^2(n+1)n!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1) - 1}{n^2(n+1)}$$
pertanto
$$\lim_n \frac{(n+3)! - n!}{n^2(n+1)!} = \lim_n \frac{(n+3)(n+2)(n+1) - 1}{n^2(n+1)} = 1$$
ovvero la successione considerata è convergente e quindi limitata.

3. La funzione f è derivabile in D, inoltre per ogni $(x,y) \in D$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x}{(5-x^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{2y}{(1+y^2)^2} \end{aligned}$$

Cerchiamo i punti stazionari di f interni a D, ovvero risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \frac{2x}{(5-x^2)^2} = 0 \\ -\frac{2y}{(1+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene come soluzione il punto $O(0,0)$ che è interno a D. Studiamo la natura di questo punto. Per ogni $(x,y) \in D$ calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{2(5-x^2)^2 + 8x^2(5-x^2)}{(5-x^2)^4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{-2(1+y^2)^2 + 8y^2(1+y^2)}{(1+y^2)^4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \end{aligned}$$

La matrice Hessiana di f nel punto $O(0,0)$ è data da

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{25} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante negativo. Quindi il punto $O(0,0)$ è di sella per f. Ora studiamo massimi e minimi di f sulla frontiera di D. Possiamo scrivere $Fr\,(D) = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ ove

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, \ -1 \le y \le 1\right\} \\ D_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1, \ -1 \le x \le 1\right\} \\ D_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1, \ -1 \le y \le 1\right\} \\ D_4 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -1, \ -1 \le x \le 1\right\}. \end{aligned}$$

Consideriamo $g_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ e $g_3 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tali che $g_1 = f|_{D_1}$ e $g_3 = f|_{D_3}$. Allora

$$\begin{aligned} \forall\, y &\in [-1,1] : g_1(y) = f|_{D_1}(x,y) = f(1,y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{1+y^2} \\ \forall\, y &\in [-1,1] : g_3(y) = f|_{D_3}(x,y) = f(-1,y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{1+y^2} \end{aligned}$$

e si ha

$$\forall\, y \in [-1,1] : g_1'(y) = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$$
$$\forall\, y \in [-1,1] : g_3'(y) = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$$

Quindi g_1 e g_3 sono crescenti in $[-1,0]$ e decrescenti in $[0,1]$, cioè si ha che $y=0$ è punto di massimo relativo per g_1 e per g_3 e $g_1(0)=\frac{5}{4}$ e $g_3(0)=\frac{5}{4}$ sono massimi relativi per g_1 e g_3. Consideriamo $g_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ e $g_4 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tali che $g_2 = f|_{D_2}$ e $g_4 = f|_{D_4}$. Allora

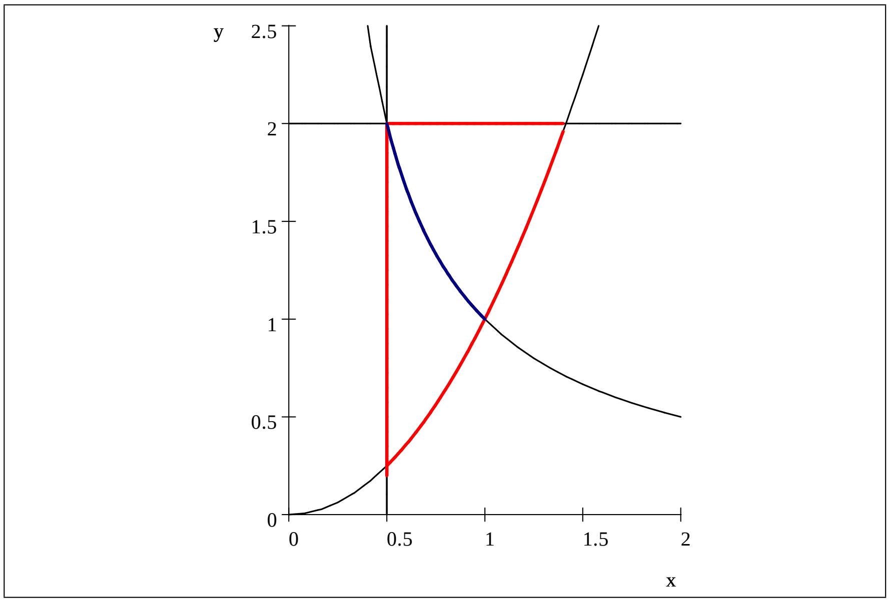
$$\forall\, x \in [-1,1] : g_2(x) = f|_{D_2}(x,y) = f(x,1) = \frac{1}{5-x^2} + \frac{1}{2}$$
$$\forall\, x \in [-1,1] : g_4(x) = f|_{D_4}(x,y) = f(x,-1) = \frac{1}{5-x^2} + \frac{1}{2}$$

e si ha

$$\forall\, x \in [-1,1] : g_2'(x) = \frac{2x}{(5-x^2)^2}$$
$$\forall\, x \in [-1,1] : g_4'(x) = \frac{2x}{(5-x^2)^2}$$

Quindi g_2 e g_4 sono sempre crescenti e si ha che $x=0$ è punto di minimo relativo per g_2 e g_4 e $g_2(0)=\frac{7}{10}$ e $g_4(0)=\frac{7}{10}$ sono minimi relativi per g_2 e g_4. Inoltre si ha che $g_1(1)=g_2(1)=\frac{3}{4}$, $g_2(-1)=g_3(1)=\frac{3}{4}$, $g_3(-1)=g_4(-1)=\frac{3}{4}$ e $g_4(1)=g_1(-1)=\frac{3}{4}$. Pertanto i punti $A(1,0)$ e $B(-1,0)$ sono punti di massimo assoluto per f e $\frac{5}{4}$ è il massimo assoluto per f, i punti $C(0,-1)$ e $D(0,1)$ sono punti di minimo assoluto per f e $\frac{7}{10}$ è il minimo assoluto per f.

4. Poichè $\log(xy) > 0 \iff xy > 1$ posso dividere il dominio D in due parti, D_1 e D_2 come in figura



e quindi l'integrale da calcolare diventa

$$\int\int_D |\log(xy)|\, dxdy = \int\int_{D_1} \log(xy)dxdy - \int\int_{D_2} \log(xy)dxdy.$$

L'insieme

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \le x \le 1,\ \frac{1}{x} \le y \le 2\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le \sqrt{2},\ x^2 \le y \le 2\right\}$$

è unione di due domini normali rispetto all'asse x, quindi (integrando poi per parti) si ha

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_1} \log(xy)dxdy &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{2} \log(xy)dy\right) dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^{2} \log(xy)dy\right) dx = \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[y\log(xy) - y\right]_{\frac{1}{x}}^{2} dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \left[y\log(xy) - y\right]_{x^2}^{2} dx = \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \left(2\log(2x) - 2\right) dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x} dx - \int_{1}^{\sqrt{2}} \left(3x^2 \log x + x^2\right) dx
\end{aligned}$$

L'insieme

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \frac{1}{x}\right\}$$

è un dominio normale rispetto all'asse x, quindi (integrando poi per parti) si ha

$$\int\int_{D_2} \log(xy)dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{x^2}^{\frac{1}{x}} \log(xy)dy\right)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[y\log(xy)-y\right]_{x^2}^{\frac{1}{x}}dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x^2-3x^2\log x\right)dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x}dx$$

Pertanto si ha (integrando ancora per parti)

$$\int\int_{D} \log(xy)dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} 2\log(2x)\,dx - 2\left[x\right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} - 3\int_{1}^{\sqrt{2}} x^2\log x dx + 3\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\log x dx =$$

$$= 2\left[x\log(2x)-x\right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} + 1 - \frac{9}{4}\sqrt{2} + 3\left[x^3\log x - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - 3\left[x^3\log x - \frac{x^3}{3}\right]_{1}^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{3}{8}\log 2 - \frac{9}{4}\sqrt{2} - \frac{15}{8}.$$