Risoluzione I Appello di Luglio

1. La funzione è ovviamente definita su tutto $\mathbb{R}$ e non presenta simmetrie. Le intersezioni con gli assi sono i punti $A(0,2)$ e $B(\sqrt{2},0)$. Calcoliamo gli eventuali asintoti orizzontali (quelli verticali non ci sono):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\sqrt{x^2-4}+x} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-4}-x\right) = +\infty$$

Quindi $y=0$ è asintoto orizzontale destro. Vediamo ora se ci sono asintoti obliqui da sinistra.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-1\right) = -2$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} (f(x)+2x) &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-4}+x\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)}{\sqrt{x^2-4}-x} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}-x} = 0\end{aligned}$$

Da cui si ha che la retta $y=-2x$ è asintoto obliquo da sinistra per f. Studiamo ora la positività della funzione risolvendo la disequazione

$$\sqrt{|x^2-4|}-x \geq 0.$$

Questa disequazione è ovviamente verificata per ogni $x<0$; per $x\geq 0$ bisogna distinguere due casi: quando $x^2-4<0$, cioè per $0\leq x<2$, e quando $x^2-4\geq 0$, cioè per $x\geq 2$. Se $0\leq x<2$ elevendo al quadrato si ha

$$4-x^2 \geq x^2$$

che è soddisfatta per $0\leq x\leq\sqrt{2}$. Mentre per $x\geq 2$ elevendo al quadrato si ottiene

$$x^2-4 \geq x^2$$

che non è mai soddisfatta. Quindi la funzione è strettamente positiva per $x<\sqrt{2}$ e strettamente negativa per $x>\sqrt{2}$. La funzione è inoltre continua su tutto l'insieme di definizione e poichè

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}-x & \text{se } -2<x<2 \\ \sqrt{x^2-4}-x & \text{se } x\leq -2 \vee x\geq 2 \end{cases}$$

sicuramente la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ e si ha

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}-1 & \text{se } -2<x<2 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-1 & \text{se } x<-2 \vee x>2 \end{cases}$$

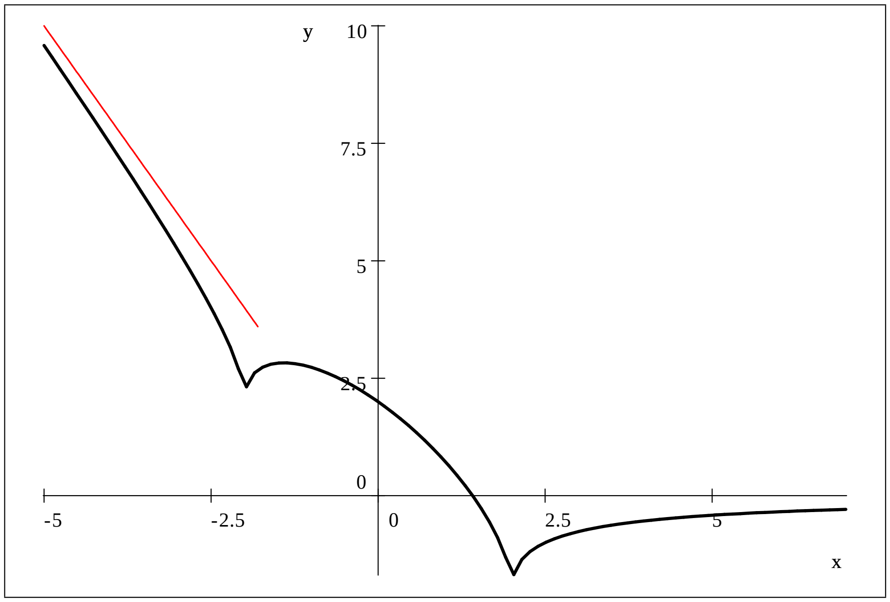
Si vede facilmente che, essendo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-2^-} f'(x) &= -\infty, \lim_{x\to-2^+} f'(x)=+\infty, \\ \lim_{x\to2^-} f'(x) &= -\infty, \lim_{x\to2^+} f'(x)=+\infty, \end{aligned}$$

la funzione f non è derivabile nei punti $x=-2$ e $x=2$. Studiamo ora il segno della derivata prima di f. Per $-2<x<2$ si ha che $f'(x)\geq 0$ se $x+\sqrt{4-x^2}\leq 0$ cioè se $\sqrt{4-x^2}\leq -x$. Tale disequazione non è mai verificata quando $0\leq x<2$. Per $-2<x<0$ elevando al quadrato si ha $4-x^2\leq x^2$ che è soddisfatta per $-2<x\leq\sqrt{2}$. Se invece $x<-2$ oppure $x>2$, si ha che $f'(x)\geq 0$ se $x-\sqrt{x^2-4}\geq 0$, cioè se $\sqrt{x^2-4}\leq x$. Tale disequazione non è mai verificata per $x<-2$. Per $x>2$ elevando al quadrato si ha che $x^2-4\leq x^2$ che è sempre soddisfatta. Pertanto la funzione f è decrescente in $]-\infty,-2]\cup\left[-\sqrt{2},2\right]$ ed è crescente in $\left[-2,-\sqrt{2}\right]\cup[2,+\infty[$. I punti $x=-2$ e $x=2$ sono di minimo relativo per f, mentre il punto $x=-\sqrt{2}$ è di massimo relativo per f. Inoltre, poichè $f(-2)=2$, $f(2)=-2$ e la funzione non presenta asintoti verticali, ma un asintoto orizzontale destro, il punto $x=2$ è di minimo assoluto per f. Invece $f(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ non è il massimo assoluto per la funzione visto che f presenta un asintoto obliquo da sinistra. Infine, la funzione è derivabile due volte in $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ e si ha

$$f''(x)=\begin{cases} \frac{-4}{\sqrt{(4-x^2)^3}} & \text{se } -2<x<2 \\ \frac{-4}{\sqrt{(x^2-4)^3}} & \text{se } x<-2 \vee x>2 \end{cases}$$

da cui segue facilmente che f è concava in tutto il suo insieme di definizione. Possiamo ora tracciare un suo grafico approssimativo:



2. La serie può essere scritta come
$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^{2n}}$$
il cui termine generale, per ogni $n \geq 1$, è $a_n = \frac{3^n}{4^{2n}} = \left(\frac{3}{16}\right)^n$. Quindi si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \frac{3}{16} < 1$ che allora converge. La somma della serie è data da
$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{16}} - 1\right) = \frac{3}{26}.$$

3. Innanzitutto il dominio della forma differenziale ω è $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\right\}$. Vediamo se ω è chiusa. Calcoliamo
$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{1}{1+x},\ \frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{1}{1+x}.$$
Essendo $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}$, la forma ω è chiusa, quindi è esatta poichè Ω è un insieme stellato. Calcoliamo una sua primitiva. Consideriamo il punto $O(0,0) \in \Omega$ e prendiamo un punto $P\,(x,y)$. Scegliamo il cammino $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ che congiunge i punti O e P con
$$\gamma_1 \quad : \quad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \bar{x}$$
$$\gamma_2 \quad : \quad \begin{cases} x = \bar{x} \\ y = t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \bar{y}$$

e integriamo la forma differenziale ω lungo tale cammino:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{1+t} dt + \int_0^{\bar{y}} \ln(1+\bar{x})\, dt = \\ &= [\ln|1+t|]_0^{\bar{x}} + \ln(1+\bar{x})\,\bar{y} = (1+\bar{y})\ln(1+\bar{x})\,.\end{aligned}$$

Quindi una primitiva di ω è la funzione $f:\Omega\to\mathbb{R}$ tale che

$$f(x,y) = (1+y)\ln(1+x)$$

per ogni $(x,y)\in\Omega$.

4. L'insieme D è un dominio non normale rispetto all'asse x, ma è normale rispetto all'asse y, infatti

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 2,\ -2y+4\le x\le -y+4\right\}.$$

Pertanto l'integrale diventa

$$\begin{aligned}\int\int_D (2x+y)dxdy &= \int_0^2 \left(\int_{-2y+4}^{-y+4} (2x+y)dx\right) dy = \int_0^2 \left[x^2+xy\right]_{-2y+4}^{-y+4} dy = \\ &= \int_0^2 \Big((4-y)^2 + y(4-y) - (4-2y)^2 - y(4-2y)\Big)\, dy = \\ &= \int_0^2 \left(-2y^2+8y\right) dy = \left[-\frac{2}{3}y^3 + 4y^2\right]_0^2 = \frac{32}{3}.\end{aligned}$$