Risoluzione Appello di Aprile

1. Innanzitutto poniamo $w = z + 3$ e risolviamo quindi
$$w^2 = \left(\sqrt{3} - i\right)^2.$$
In forma trigonometrica il numero complesso $\sqrt{3} - i$ si scrive come
$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$
Per la formula di De Moivre si ha che
$$\left(\sqrt{3} - i\right)^2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$
Quindi le radici quadrate di $\left(\sqrt{3} - i\right)^2$ sono
$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i \\ w_1 &= \sqrt{4}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = i - \sqrt{3} \end{aligned}$$
Pertanto le soluzioni dell'equazione di partenza sono
$$\begin{aligned} z_0 &= w_0 - 3 = \sqrt{3} - i - 3 = \sqrt{3} - 3 - i \\ z_1 &= w_1 - 3 = i - \sqrt{3} - 3 = i - \left(\sqrt{3} + 3\right). \end{aligned}$$

2. Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ si ha
$$\cos\left(\frac{n+1}{n}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) = -\sin\frac{\pi}{2n}$$
da cui
$$\lim_n \left(n\cos\left(\frac{n+1}{n}\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\lim_n \left(n\sin\frac{\pi}{2n}\right) = -\lim_n \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n}} = -\lim_n \frac{\pi}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} = -\frac{\pi}{2}.$$
Pertanto la successione è convergente e quindi è limitata.

3. La funzione è derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$ e in tale insieme le sue derivate parziali sono date da
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{x(y^2+1)} + x(y^2+1)e^{x(y^2+1)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2x^2ye^{x(y^2+1)}. \end{aligned}$$

I punti stazionari di f saranno quindi le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

cioè le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} e^{x(y^2+1)}(1+xy^2+x) = 0 \\ 2x^2ye^{x(y^2+1)} = 0 \end{cases}$$

ovvero soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1+xy^2+x = 0 \\ x^2y = 0 \end{cases}$$

che si sdoppia nei due sistemi

$$S_1 \begin{cases} x = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

che non mi danno soluzioni interne a T. Pertanto non abbiamo punti stazionari per f interni al triangolo T. Studiamo quindi la frontiera $fr(T)$ di tale insieme. Possiamo scrivere la frontiera di T come unione dei segmenti AB, BC e CA dati rispettivamente dagli insiemi

$$\begin{aligned} T_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 2,\, y = 1\right\} \\ T_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 2,\, y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right\} \\ T_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1,\, -1 \le y \le 1\right\}. \end{aligned}$$

Per ogni $(x,y) \in T_1$ definiamo

$$g_1(x) = f|_{T_1}(x,y) = f(x,1) = xe^{2x}.$$

La funzione $g_1 : [-1,2] \to \mathbb{R}$ è derivabile e per ogni $x \in [-1,2]$ si ha

$$g_1'(x) = e^{2x}(1+2x).$$

Quindi, studiando il segno di g_1' si conclude che $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di minimo relativo per g_1 e $g_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$ è minimo relativo per g_1. Per ogni $(x,y) \in T_2$ definiamo

$$g_2(x) = f|_{T_2}(x,y) = f(x, \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}) = xe^{x(\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{10}{9})}.$$

La funzione $g_2 : [-1,2] \to \mathbb{R}$ è derivabile e per ogni $x \in [-1,2]$ si ha

$$g_2'(x) = e^{x(\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{10}{9})}\left(1 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{9}x^2 + \frac{10}{9}x\right).$$

Essendo $g_2'(x) > 0$ per ogni $x \in [-1, 2]$, si ha che g_2 è sempre crescente. Quindi $x = -1$ è un punto di minimo assoluto per g_2 e $g_2(-1) = -\frac{1}{e^2}$ è minimo assoluto per g_2, mentre $x = 2$ è un punto di massimo assoluto per g_2 e $g_2(2) = 2e^4$ è massimo assoluto per g_2. Per ogni $(x, y) \in T_3$ definiamo

$$g_3(y) = f|_{T_3}(x, y) = f(-1, y) = -e^{-(y^2+1)}.$$

La funzione $g_3 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è derivabile e per ogni $y \in [-1, 1]$ si ha

$$g_3'(y) = 2ye^{-y^2-1}.$$

Quindi, studiando il segno di g_3' si conclude che $y = 0$ è un punto di minimo relativo per g_3 e $g_3(0) = -\frac{1}{e}$ è minimo relativo per g_3. Inoltre $g_3(1) = -\frac{1}{e^2}$. Pertanto $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ è punto di minimo assoluto per f e $f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2e}$ è il minimo assoluto di f, mentre $(2, 1)$ è punto di massimo assoluto per f e $f(2, 1) = 2e^4$ è il massimo assoluto di f.

4. Dividendo ambo i membri per e^x otteniamo

$$y' = 1 + e^{y-x} \tag{1}$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine non lineare. Posto $z = y - x$, si ha che

$$y = z + x \tag{2}$$

da cui

$$y' = z' + 1.$$

Sostituendo quest'ultima uguaglianza in (1) si ha

$$z' = e^z \tag{3}$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Non abbiamo integrali singolari perchè e^z non si annulla mai. Separiamo quindi le variabili ottenendo

$$\frac{z'}{e^z} = 1$$

da cui integrando

$$\int \frac{dz}{e^z} = \int dx$$

si ha che

$$-e^{-z} = x + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Quindi l'integrale generale della (3) è dato da

$$z = -\log(-x - c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, per la (2), si ha che

$$y = x - \log(-x - c), \quad c \in \mathbb{R}$$

è un integrale generale dell'equazione di partenza (1).