Risoluzione I Appello di Febbraio 2008

1. Innanzitutto vediamo dove è definita la funzione f. Poichè la funzione *arcseno* è definita in $[-1,1]$, deve essere

$$-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

che è soddisfatta in tutto $\mathbb{R}$. Quindi $X_f = \mathbb{R}$. Inoltre la funzione è pari. Le intersezioni con l'asse x sono date dai punti $A(-1,0)$ e $B(1,0)$, l'intersezione con l'asse y è data dal punto $C\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ora studiamo il segno della funzione:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Quindi la funzione f è positiva in $[-1,1]$ e negativa in $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. Ora calcoliamo gli asintoti. La funzione non ha asintoti verticali essendo continua in tutto X_f. Calcoliamo gli eventuali asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Pertanto $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per f e quindi la funzione f è limitata inferiormente. La funzione f è sicuramente derivabile per le x tali che

$$-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1$$

ovvero in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, inoltre in tale insieme

$$f'(x) = \frac{-2x\left(1+x^2\right) - 2x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = -\frac{2x}{1+x^2}\frac{1}{|x|}$$

da cui si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2} & \text{se } x > 0 \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

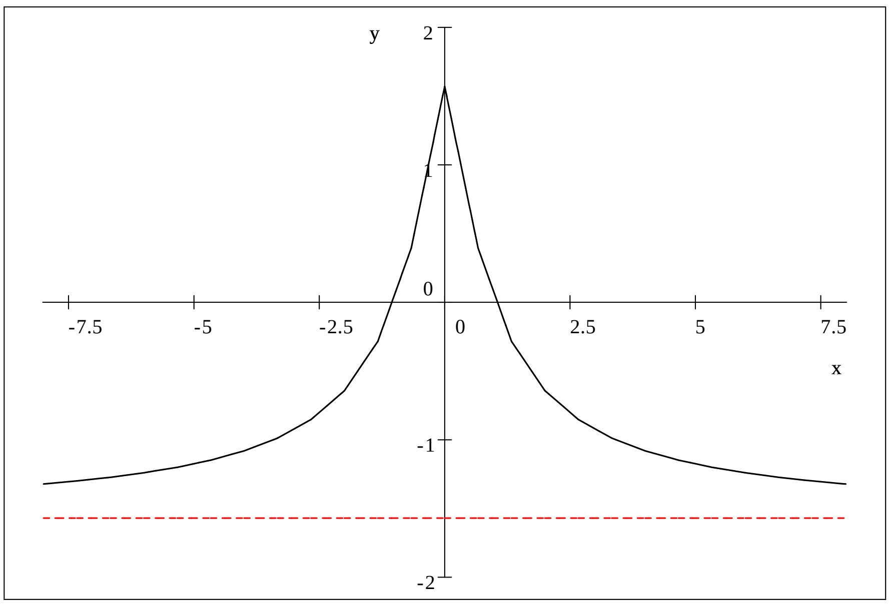
Inoltre, poichè

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{1+x^2}\right) = -2 \\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{1+x^2} = 2 \end{aligned}$$

si ha che f non è derivabile in 0. Inoltre $x = 0$ è un punto angoloso. Ma, poichè $f'(x) > 0$ se $x < 0$ e $f'(x) < 0$ se $x > 0$, si ha che f è crescente in $]-\infty, 0[$ e decrescente in $]0,+\infty[$, quindi $x = 0$ è un punto di massimo relativo per f, anzi assoluto. La funzione f è derivabile 2 volte in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e in tale insieme

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4x}{1+x^2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{4x}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

da cui si ha che $f''(x) > 0$ sia per $x > 0$ che per $x < 0$, ovvero che la funzione f è convessa e non ci sono flessi. Tracciamo ora un grafico approssimativo della funzione f:



2. Posto $w = z^2$, l'equazione diventa

$$w^2 + i\sqrt{3}w + 6 = 0$$

da cui

$$w_{0,1} = \frac{-i\sqrt{3} + \sqrt{-27}}{2}.$$

Poichè in forma trigonometrica si scrive

$$-27 = 27\left(\cos\pi + i\sin\pi\right),$$

allora le radici quadrate di -27 sono

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{-27}\right)_0 &= \sqrt{27}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{-27}\right)_1 &= \sqrt{27}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -3i\sqrt{3} \end{aligned}$$

da cui si ha

$$w_0 = i\sqrt{3},\ w_1 = -2i\sqrt{3}.$$

Ma $w = z^2$, quindi devo calcolare le radici quadrate di w_0 e w_1. In forma trigonometrica

$$\begin{aligned} i\sqrt{3} &= \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ -2i\sqrt{3} &= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

quindi le radici quadrate di w_0 e w_1, nonchè le soluzioni della nostra equazione di partenza, sono

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ z_1 &= \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) = -\sqrt[4]{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ z_2 &= \sqrt{2}\sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt[4]{3}\,(i-1) \\ z_4 &= \sqrt{2}\sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = \sqrt[4]{3}\,(1-i)\,. \end{aligned}$$

3. Poniamo $y = x - 2$ è consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Poichè, posto $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ per ogni $n \geq 1$, si ha

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \lim_n \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} = 1,$$

allora, per il criterio di D'Alembert, si ha che il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{\sqrt{n+1}}$ è $R = 1$. Quindi tale serie converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $]-1,1[$ e converge totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k,k] \subset]-1,1[$. Ora vediamo cosa succede agli estremi dell'intervallo di convergenza. Se $x = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ che converge. Se $x = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ che non converge. Quindi, per il teorema di Abel, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{\sqrt{n+1}}$ converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $[-1,1[$ e converge totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k,k] \subset [-1,1[$. Essendo $y = x-2$, si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $[1,3[$ e converge totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k,k] \subset [1,3[$.

4. L'insieme di definizione della forma differenziale ω è $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$ che è un insieme stellato rispetto ad ogni suo punto. Vediamo se ω è chiusa. Calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y} - 2xy\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - 2x \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - 2x\end{aligned}$$

Quindi, essendo $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}$, si ha che ω è chiusa e quindi è esatta. Calcoliamo una sua primitiva. Consideriamo il punto $P_0\,(1, 0) \in \Omega$ e un punto qualsiasi $P\,(\overline{x}, \overline{y})$ e congiungo questi due punti con il cammino $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ove $\gamma_1 : [0, \overline{x}] \to \mathbb{R}^2$ e $\gamma_2 : [1, \overline{y}] \to \mathbb{R}^2$ sono date da

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 \end{array}\right. \qquad \text{con } 0 \leq t \leq \overline{x} \\ \gamma_2 &: \left\{\begin{array}{l} x = \overline{x} \\ y = t \end{array}\right. \qquad \text{con } 1 \leq t \leq \overline{y}\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\overline{x}} (1 - 2t)\, dt + \int_1^{\overline{y}} \left(\frac{\overline{x}}{2\sqrt{t}} - \overline{x}^2\right) dt = \\ &= \overline{x}\sqrt{\overline{y}} - \overline{x}^2\overline{y}.\end{aligned}$$

Pertanto la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$\forall\,(x, y) \in \Omega : f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 y$$

è una primitiva di ω. Calcoliamo ora l'integrale di ω lungo la curva $\varphi : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\varphi : \left\{\begin{array}{l} x\,(t) = t \\ y\,(t) = 3t^2 \end{array}\right. \qquad \text{con } 1 \leq t \leq 2,$$

ovvero calcoliamo

$$\begin{aligned}\int_\varphi \omega &= \int_1^2 \left(\sqrt{3t^2} - 2t\ 3t^2\right) dt + \int_1^2 \left(\frac{t}{2\sqrt{3t^2}} - t^2\right) 6t\ dt = \\ &= \sqrt{3}\int_1^2 t\ dt - 6\int_1^2 t^3 dt + \sqrt{3}\int_1^2 t\ dt - 6\int_1^2 t^3 dt = 3\left(\sqrt{3} - 15\right).\end{aligned}$$