

Risoluzione II Esonero

1. Una successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $f_n : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ è puntualmente convergente se esiste una funzione $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in X : \lim_n f_n(x) = f(x)$$

ovvero tale che

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Fissiamo $x \in \mathbb{R}$ e calcoliamo

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \sqrt{e^{2x} + \frac{1}{n^2}} = e^x.$$

Quindi la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è il limite puntuale di $(f_n)_{n \geq 1}$. Vediamo ora se tale limite è anche uniforme.

Fissiamo $n \geq 1$ e stimiamo per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{e^{2x} + \frac{1}{n^2}} - e^x \right| = \frac{\left| \sqrt{e^{2x} + \frac{1}{n^2}} - e^x \right|}{\sqrt{e^{2x} + \frac{1}{n^2}} + e^x} \left(\sqrt{e^{2x} + \frac{1}{n^2}} + e^x \right) = \\ &= \frac{e^{2x} + \frac{1}{n^2} - e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + \frac{1}{n^2}} + e^x} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Pertanto $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}$, da cui si ha che

$$\limsup_n \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_n \frac{1}{n} = 0$$

e quindi che f è anche limite uniforme della successione $(f_n)_{n \geq 1}$.

2. Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, si dice differenziabile se per ogni $x_0 \in A$ esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Teorema (del differenziale totale) Siano $A \subset \mathbb{R}^2$, x_0 punto interno ad A ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è derivabile in A e $\frac{\partial f}{\partial x} : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue in x_0 , allora f è differenziabile in x_0 .

3. La funzione f è derivabile in T , inoltre per ogni $(x, y) \in T$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy^2 e^{x^2+y^2-1} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2ye^{x^2+y^2-1} + 2y^3 e^{x^2+y^2-1}. \end{aligned}$$

Cerchiamo i punti stazionari di f interni a T , ovvero risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 2xy^2e^{x^2+y^2-1} = 0 \\ 2ye^{x^2+y^2-1} + 2y^3e^{x^2+y^2-1} = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} xy^2 = 0 \\ y(1+y^2) = 0 \end{cases}$$

che equivale a risolvere 2 sistemi

$$(S_1) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (S_2) \begin{cases} x = h \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{con } h \neq 0.$$

Quindi abbiamo il punto $O(0, 0) \in Fr(T)$ e i punti $A_h(h, 0) \notin T$. Ora studiamo massimi e minimi di f sulla frontiera di T . Possiamo scrivere $Fr(T) = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ ove

$$\begin{aligned} T_1 &= \left\{ (x, \sqrt{1-x^2}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \\ T_2 &= \left\{ (x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \\ T_3 &= \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Consideriamo $g_1 : \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2 : \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $g_1 = f|_{T_1}$, $g_2 = f|_{T_2}$ e $g_3 = f|_{T_3}$. Allora

$$\forall x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] : g_1(x) = f|_{T_1}(x, y) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = 1 - x^2$$

allora si ha

$$\forall x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] : g_1'(x) = -2x.$$

Quindi g_1 è decrescente in $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, da cui si ha che $x = 0$ è punto di massimo relativo per g_1 e $g_1(0) = 1$ è massimo relativo per g_1 e $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è punto di minimo relativo per g_1 e $g_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ è un minimo relativo per g_1 . Consideriamo

$$\forall x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] : g_2(x) = f|_{T_2}(x, y) = f(x, x) = x^2e^{2x^2-1}$$

allora si ha

$$\forall x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] : g_2'(x) = 2xe^{2x^2-1} (1 + 2x^2).$$

Quindi g_2 è crescente in $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, da cui si ha che $x = 0$ è punto di minimo relativo per g_2 e $g_2(0) = 0$ è minimo relativo per g_2 e $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ è punto di massimo relativo per g_2 e $g_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ è un massimo relativo per g_2 . Consideriamo

$$\forall x \in [0, 1] : g_3(y) = f|_{T_3}(x, y) = f(0, y) = y^2 e^{y^2-1}$$

allora si ha

$$\forall x \in [0, 1] : g_3'(y) = 2ye^{y^2-1} (1 + y^2).$$

Quindi g_3 è crescente in $[0, 1]$, da cui si ha che $y = 0$ è punto di minimo relativo per g_3 e $g_3(0) = 0$ è minimo relativo per g_3 e $y = 1$ è punto di massimo relativo per g_3 e $g_3(1) = 1$ è un massimo relativo per g_3 . Pertanto $P_1(0, 0)$ è punto di minimo assoluto per f e $f(P_1) = 0$ è il minimo assoluto per f , $P_2(0, 1)$ è punto di massimo assoluto per f e $f(P_2) = 1$ è il massimo assoluto per f .

4. L'insieme di definizione della forma differenziale ω è $\Omega = \mathbb{R}^2$ che è un insieme stellato rispetto ad ogni suo punto. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2xy}{(1+x^2)^2} \right) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Poichè $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}$ si ha che ω è chiusa, quindi è esatta. Calcolo una sua primitiva. Considero il punto $P_0(0, 0) \in \Omega$ e un punto $P(\bar{x}, \bar{y})$ e un cammino γ che li congiunge tale che $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ con $\gamma_1 : [0, \bar{x}] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma_2 : [0, \bar{y}] \rightarrow \mathbb{R}$ così definite:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} & \text{con } 0 \leq t \leq \bar{x} \\ \gamma_2 &: \begin{cases} x = \bar{x} \\ y = t \end{cases} & \text{con } 0 \leq t \leq \bar{y} \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\bar{x}} 0 dt - \int_0^{\bar{y}} \frac{1}{1+\bar{x}^2} dt = -\frac{\bar{y}}{1+\bar{x}^2}.$$

Pertanto una primitiva di ω è la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = -\frac{y}{1+x^2}.$$

5. E' un'equazione differenziale lineare del II ordine a coefficienti costanti non omogenea. Considero l'omogenea associata

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

e il polinomio caratteristico ad essa associato

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3.$$

Cerco le radici del polinomio caratteristico, quindi

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

da cui ottengo 2 radici: $\lambda_1 = 1$ con molteplicità $m_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$ con molteplicità $m_2 = 1$. Quindi

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

è un integrale generale dell'omogenea associata. Poichè 1 è radice del polinomio caratteristico, allora un integrale particolare della completa sarà

$$\bar{y} = kxe^x \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Ora calcolo

$$\begin{aligned} \bar{y}' &= ke^x + kxe^x \\ \bar{y}'' &= 2ke^x + kxe^x \end{aligned}$$

e impongo che \bar{y} sia soluzione della completa, ovvero che

$$2ke^x + kxe^x + 2ke^x + kxe^x - 3kxe^x = 2e^x$$

da cui si ottiene

$$k = \frac{1}{2}.$$

Pertanto

$$\bar{y} = \frac{1}{2}xe^x$$

è un integrale particolare della completa e

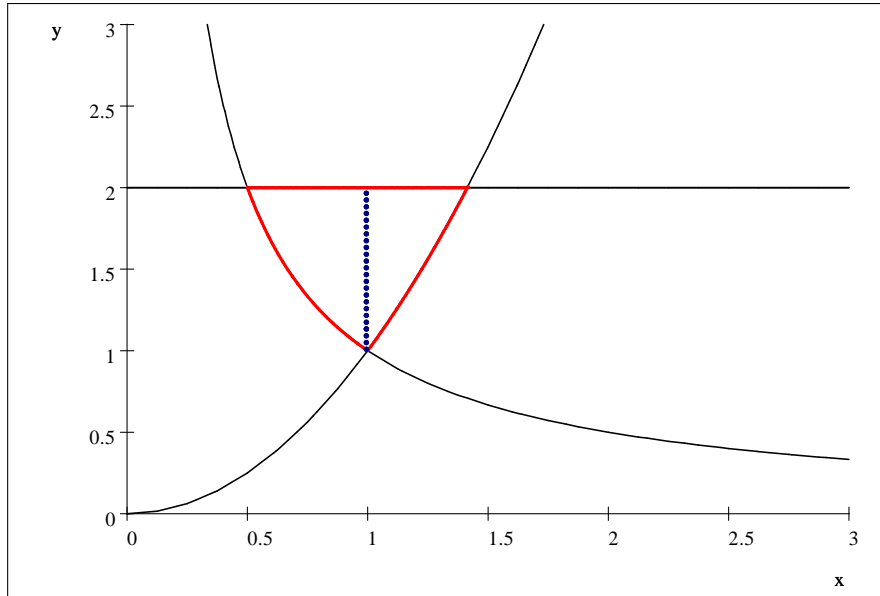
$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}xe^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

è un integrale generale della completa.

6. L'insieme D non è un dominio normale rispetto all'asse x , ma si può scrivere come unione di due domini D_1 e D_2 normali rispetto all'asse x ove

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq 2 \right\} \\ D_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 \leq y \leq 2 \right\} \end{aligned}$$

come in figura



Pertanto

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{x}{1+y} dx dy &= \iint_{D_1} \frac{x}{1+y} dx dy + \iint_{D_2} \frac{x}{1+y} dx dy = \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{1}{x}}^2 \frac{x}{1+y} dy \right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^2 \frac{x}{1+y} dy \right) dx = \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 [x \log |1+y|]_{\frac{1}{x}}^2 dx + \int_1^{\sqrt{2}} [x \log |1+y|]_{x^2}^2 dx = \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x \log 3 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} x \log 3 dx - \int_1^{\sqrt{2}} x \log (1+x^2) dx = \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \log 3 \right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} - \left[\frac{x^2}{2} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{1+x} dx + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^3}{1+x} dx = \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{11}{8} \log 2 - \log 3.
 \end{aligned}$$