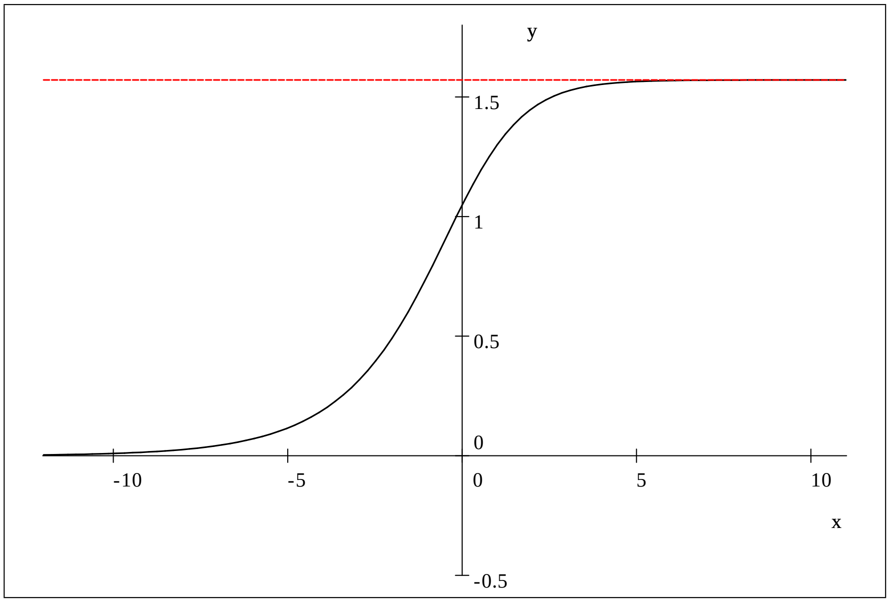
Risoluzione II Appello di Febbraio

1. Innanzitutto vediamo dove è definita la funzione f. Poichè la funzione arccos è definita in $[-1,1]$, deve essere
$$-1 \leq \frac{1}{1+e^x} \leq 1$$
che è soddisfatta in tutto $\mathbb{R}$. Quindi $X_f = \mathbb{R}$. Inoltre la funzione non è nè pari nè dispari. L'intersezione con l'asse y è data dal punto $B\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, mentre non abbiamo intersezioni con l'asse x. La funzione è sempre positiva. Inoltre, essendo continua in tutto X_f, la funzione f non ha asintoti verticali. Calcoliamo gli eventuali asintoti orizzontali:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \arccos\frac{1}{1+e^x} = \frac{\pi}{2}\\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \arccos\frac{1}{1+e^x} = 0.\end{aligned}$$
Pertanto $y=0$ e $y=\frac{\pi}{2}$ sono asintoti orizzontali per f e quindi la funzione f è limitata. La funzione f è sicuramente derivabile per le x tali che
$$-1 < \frac{1}{1+e^x} < 1$$
ovvero in tutto $\mathbb{R}$, inoltre in tale insieme
$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+2e^x}}.$$
Ovviamente $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi f è strettamente crescente in X_f. Pertanto non abbiamo nè massimi nè minimi relativi. La funzione è derivabile 2 volte in $\mathbb{R}$ e in tale insieme
$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{e^x(1+e^x)\sqrt{e^{2x}+2e^x} - e^x\left[e^x\sqrt{e^{2x}+2e^x} + (1+e^x)\frac{2e^{2x}+2e^x}{2\sqrt{e^{2x}+2e^x}}\right]}{(1+e^x)^2(e^{2x}+2e^x)} =\\ &= \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2(e^{2x}+2e^x)\sqrt{e^{2x}+2e^x}}.\end{aligned}$$
Allora
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1-e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$
inoltre
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0,$$
ovvero f è convessa in $]-\infty, 0[$ ed è concava in $]0, +\infty[$. Quindi $x = 0$ è un punto di flesso discendente per f. Tracciamo infine un grafico approssimativo della funzione:



2. Questa è una serie a segno alterno. Posto $a_n = 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$ per ogni $n \geq 1$ si ha che
$$\lim_n a_n = \lim_n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0.$$
Inoltre, posto $f(n) = 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$, si ha che f è derivabile ed inoltre per ogni $n \geq 1$
$$f'(n) = -\frac{1}{2n\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Poichè per ogni $n \geq 1$ si ha che $f'(n) < 0$, allora la successione $(a_n)_{n\geq 1}$ è decrescente. Quindi la serie verifica le ipotesi del criterio di Leibniz e pertanto è convergente. Studiamo ora la convergenza assoluta, cioè consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$
Essendo
$$\lim_n \frac{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$
per il criterio del confronto asintotico si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ovvero è divergente positivamente. Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ non è assolutamente convergente.

3. L'insieme D non è normale nè rispetto all'asse x nè rispetto all'asse y. Però possono scrivere
$$D = D_1 \cup D_2$$
con
$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\, 0 \leq y \leq 1\right\} \\ D_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq \frac{1}{2x}\right\} \end{aligned}$$
domini normali rispetto all'asse x. Quindi
$$\begin{aligned} \int\int_D x\sqrt{1-x^2}dxdy &= \int\int_{D_1} x\sqrt{1-x^2}dxdy + \int\int_{D_2} x\sqrt{1-x^2}dxdy = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dy\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2x}} x\sqrt{1-x^2}dy\right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[x\sqrt{1-x^2}y\right]_0^1 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[x\sqrt{1-x^2}y\right]_0^{\frac{1}{2x}} dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x^2}dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} -2x\sqrt{1-x^2}dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ dt = \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt = \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{8}\sqrt{3}-1\right) + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{3}{16}\sqrt{3} \end{aligned}$$
ove nel secondo integrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2}dx$ ho posto $x = \sin t$.

4. L'equazione
$$y' + y\cos x = \sin x \cos x$$
è un'equazione differenziale del I ordine lineare non omogenea a coefficienti non costanti. Considero l'omogenea associata
$$y' + y\cos x = 0$$
e calcolo
$$\int \cos x\ dx = \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$y = ce^{\sin x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

è integrale generale dell'omogenea associata. Ora calcolo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x \cos x}{e^{\sin x}} dx &= -\int \sin x \left(-e^{-\sin x} \cos x\right) dx = -\sin x e^{-\sin x} + \int \cos x \; e^{-\sin x} dx = \\ &= -\sin x e^{-\sin x} - \int -\cos x \; e^{-\sin x} dx = -\sin x e^{-\sin x} - e^{-\sin x} + c.\end{aligned}$$

Allora

$$\overline{y} = -e^{\sin x} \left(\sin x e^{-\sin x} + e^{-\sin x}\right)$$

cioè

$$\overline{y} = -\left(\sin x + 1\right)$$

è integrale particolare della completa. Pertanto

$$y = ce^{\sin x} - \sin x - 1, \quad c \in \mathbb{R}$$

è integrale generale della completa. Impongo ora che tale soluzione generica soddisfi la condizione iniziale $y\,(2\pi) = 0$, cioè che

$$0 = c - 1$$

da cui $c = 1$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y = e^{\sin x} - \sin x - 1.$$