Esercizi di riepilogo

Successioni di funzioni

1. *Sia* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *una successione di funzioni* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}^*$ *tale che*
$$\forall x \in [0,1] : f_n(x) = \frac{\log(1+n^2x^2)}{\log n}.$$
Stabilire se tale successione di funzioni converge puntualmente ad una funzione e se tale convergenza è anche uniforme.

Risoluzione Se $x = 0$ si ha che
$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{\log(1+n^2x^2)}{\log n} = 0.$$
Se $x \in]0,1]$ si ha che
$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{\log(1+n^2x^2)}{\log n} \overset{H}{=} \lim_n \frac{\frac{2nx^2}{1+n^2x^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{2n^2x^2}{1+n^2x^2} = 2.$$
Quindi la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge puntualmente verso la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ così definita:
$$\forall x \in [0,1] : f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 2 & \text{se } x \in]0,1] \end{cases}$$
Ma tale convergenza non è puntuale in quanto f_n è continua per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, mentre f non è continua poichè non è continua in 0.

2. *Sia* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *una successione di funzioni* $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}^*$ *tale che*
$$\forall x \in [0,2\pi] : f_n(x) = \left(1 - \cos\frac{x}{n}\right)^n.$$
Stabilire se tale successione di funzioni converge puntualmente ad una funzione e se tale convergenza è anche uniforme.

Risoluzione Fisso $x \in [0,2\pi]$ e calcolo
$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \left(1 - \cos\frac{x}{n}\right)^n = \lim_n e^{n\log\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)} = 0.$$
Quindi la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge puntualmente verso la funzione $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ così definita:
$$\forall x \in [0,2\pi] : f(x) = 0.$$

Fisso $n \in \mathbb{N}^*$, n grande e calcolo $\sup\limits_{x\in[0,2\pi]} \left(1-\cos\frac{x}{n}\right)^n = \sup\limits_{x\in[0,2\pi]} e^{n\log\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)}$.
Sia $x \in [0, 2\pi]$. Poichè

$$f_n'(x) = e^{n\log\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)} \frac{1}{1-\cos\frac{x}{n}} \left(\sin\frac{x}{n}\right)\frac{1}{n} > 0,$$

allora la funzione f_n è crescente in $[0, 2\pi]$ e quindi

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} f_n(x) = f_n(2\pi) = e^{n\log\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

Pertanto si ha

$$\lim_n \sup_{x\in[0,2\pi]} \left(1-\cos\frac{x}{n}\right)^n = \lim_n e^{n\log\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)} = 0,$$

cioè che f è anche limite uniforme della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Serie di funzioni e serie di potenze

1. *Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$$

converge (puntualmente)? E per quali converge uniformemente?

Risoluzione Per $x = 0$ la serie converge. Se $x \neq 0$, posto $a_n = n^x$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, si ha che

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \lim_n \frac{(n+1)^x}{n^x} \frac{|x|^{n+1}}{x^n} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^x |x| = |x|.$$

Quindi, per il criterio del rapporto, la serie converge assolutamente (e quindi puntualmente) se $|x| < 1$, cioè se $-1 < x < 1$. Ora vediamo cosa succede per $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| = 1$. Se $x = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che è convergente. Se $x = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} n$ che non è convergente. Quindi la serie converge puntualmente in $[-1, 1[$. Sia $0 < a < 1$. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ e per ogni $x \in [-a, a]$ si ha

$$|n^x x^n| = n^x |x|^n \leq n^a a^n.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^a a^n$ converge per il criterio del rapporto, per il criterio di Weierstrass si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-a, a]$ con $0 < a < 1$.

2. *Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di funzioni*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(e^{-nx^2}\right)$$

converge (puntualmente)? E per quali converge uniformemente?

Risoluzione Per $x = 0$ la serie non converge. Se $x \neq 0$, posto $a_n = \sin\left(e^{-nx^2}\right)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \lim_n \frac{\sin\left(e^{-(n+1)x^2}\right)}{\sin\left(e^{-nx^2}\right)} = \lim_n \frac{\sin\left(e^{-(n+1)x^2}\right)}{\sin\left(e^{-nx^2}\right)} \frac{e^{-(n+1)x^2}}{e^{-nx^2}} e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} < 1,$$

quindi la serie converge per il criterio del rapporto. Quindi la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}^*$. Sia $a > 0$ e $|x| \geq a$, cioè $x \in \left]-\infty, -a\right] \cup \left[a, +\infty\right[$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \left]-\infty, -a\right] \cup \left[a, +\infty\right[$ si ha

$$\left|\sin\left(e^{-nx^2}\right)\right| \leq e^{-nx^2} \leq e^{-ax^2}.$$

Poichè la serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ax^2}$ converge per il criterio del rapporto, per il criterio di Weierstrass si ha che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(e^{-nx^2}\right)$ converge totalmente (e quindi uniformemente) in $\left]-\infty, -a\right]$ o in $\left[a, +\infty\right[$ con $a > 0$.

3. *Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$$

converge (puntualmente)? E per quali converge uniformemente?

Risoluzione Posto $a_n = \frac{1}{n2^n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Quindi per Cauchy-Hadamard si ha che il raggio di convergenza della serie è $R = 2$ e quindi la serie converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $\left]-2, 2\right[$ e converge totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k, k] \subset \left]-2, 2\right[$. Ora vediamo cosa succede agli estremi dell'intervallo. Se $x = -2$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge. Se $x = 2$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che non converge. Quindi l'insieme di convergenza della serie è $A = \left[-2, 2\right[$ e, per il teorema di Abel, la serie converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $\left[-2, 2\right[$ e converge totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k, k] \subset \left[-2, 2\right[$.

Continuità e differenziabilità

1. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *così definita*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & se \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Studiare la differenziabilità di f *in* $(0,0)$.

Risoluzione Innanzitutto vediamo se f è continua in $(0,0)$, ovvero se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Poichè

$$0 \leq \left| \left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{x^2+y^2} \right| \leq \left(x^2+y^2\right)$$

e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right) = 0$, allora per il teorema della convergenza obbligata, si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

e quindi che f è continua in $(0,0)$. Ora vediamo se f è derivabile in $(0,0)$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \sin \frac{1}{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin \frac{1}{t^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \sin \frac{1}{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin \frac{1}{t^2} = 0 \end{aligned}$$

Pertanto f è derivabile in $(0,0)$ e $grad\, f(0,0) = (0,0)$. Ora calcolo

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - (gradf(0,0) \mid (x,y) - (0,0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0. \end{aligned}$$

Quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

2. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *così definita*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \arctan y}{x^2+y^2} & se \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Studiare la differenziabilità di f *in* $(0,0)$.

Risoluzione Innanzitutto vediamo se f è continua in $(0,0)$, ovvero se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Poichè

$$0 \leq \left| \frac{x^2 \arctan y}{x^2+y^2} \right| \leq |\arctan y|$$

e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan y = 0$, allora per il teorema della convergenza obbligata, si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \arctan y}{x^2+y^2} = 0$$

e quindi che f è continua in $(0,0)$. Ora vediamo se f è derivabile in $(0,0)$. Calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0\end{aligned}$$

Pertanto f è derivabile in $(0,0)$ e $grad\ f(0,0) = (0,0)$. Ora calcolo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - (gradf(0,0) \mid (x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Posto $g(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si ha che

$$\lim_{x\to 0} g(x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,x)}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{2\sqrt{2}\,|x|} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{2x\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{\arctan x}{2x\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Quindi, poichè non esiste $\lim\limits_{x\to 0} g(x,x)$, allora non esiste $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e pertanto f non è differenziabile in $(0,0)$.

Massimi e minimi

1. *Studiare massimi e minimi relativi per la funzione* $f : Q \to \mathbb{R}$ *così definita*

$$\forall (x,y) \in Q : f(x,y) = \sin(xy)$$

ove $Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 2,\ |y| < 2\right\}$.

Risoluzione Per ogni $(x,y) \in Q$ calcolo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\cos(xy)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\cos(xy)\end{aligned}$$

e cerco i punti stazionari di f in Q risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} y\cos(xy) = 0 \\ x\cos(xy) = 0 \end{cases}$$

che si sdoppia nei due sistemi

$$(S_1)\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e } (S_2)\ \begin{cases} \cos(xy) = 0 \\ \cos(xy) = 0 \end{cases}$$

da cui ho le seguenti soluzioni: $P_0\,(0,0) \in Q$ e l'insieme di punti $\left\{(x,y) \in Q \mid xy = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{(x,y) \in Q \mid xy = \pm\frac{\pi}{2}\right\}$. Per ogni $(x,y) \in Q$ calcolo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -y^2 \sin(xy)\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2 \sin(xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy)\,. \end{aligned}$$

Calcolo la matrice Hessiana della f in P_0

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $\det H_f(P_0) = -1 < 0$. Quindi P_0 è un punto di sella. Ora studiamo la natura dei punti $P_+(x,y)$ tali che $xy = \frac{\pi}{2}$ e dei punti $P_-(x,y)$ tali che $xy = -\frac{\pi}{2}$. Calcolo la matrice Hessiana della f nei punti P_+

$$H_f(P_+) = \begin{pmatrix} -y^2 & -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & -x^2 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $\det H_f(P_+) = x^2y^2 - \frac{\pi^2}{4} = 0$. Pertanto, per studiare la natura di questi punti non possiamo usare i criteri per i massimi e minimi e dobbiamo procedere per altre vie. Poichè

$$f(P_+) = 1 \geq \sin(xy) = f(x,y) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in Q$$

si ha che i punti P_+ sono punti di massimo relativo (anzi assoluto) per f. Calcolo la matrice Hessiana della f nei punti P_-

$$H_f(P_-) = \begin{pmatrix} y^2 & -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & x^2 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $\det H_f(P_-) = x^2y^2 - \frac{\pi^2}{4} = 0$. Pertanto, per studiare la natura di questi punti non possiamo usare i criteri per i massimi e minimi e dobbiamo procedere per altre vie. Poichè

$$f(P_-) = -1 \leq \sin(xy) = f(x,y) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in Q$$

si ha che i punti P_- sono punti di minimo relativo (anzi assoluto) per f.

2. *Studiare massimi e minimi relativi ed assoluti per la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *così definita*

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 2x^3 + x^2 + y^2 - 5$$

in $R = [-1, 0] \times [-1, 1]$.

Risoluzione Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ calcolo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 6x^2 + 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y \end{aligned}$$

e cerco i punti stazionari di f interni ad R risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 6x^2 + 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

che si sdoppia nei due sistemi

$$(S_1) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ e } (S_2) \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui ho le seguenti soluzioni: $P_0\,(0, 0) \in Fr(R)$ e $P_1(-\frac{1}{3}, 0)$ che è interno ad R. Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ calcolo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 12x + 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Calcolo la matrice Hessiana della f in P_1

$$H_f\,(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $\det H_f\,(P_0) = -4 < 0$. Quindi P_1 è un punto di sella. Ora studiamo i massimi e i minimi sulla frontiera di R. Posso scrivere $Fr\,(R) = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ ove

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 0,\ y = 1\right\} \\ R_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0,\ -1 \le y \le 1\right\} \\ R_3 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 0,\ y = -1\right\} \\ R_4 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1,\ -1 \le y \le 1\right\}. \end{aligned}$$

Considero $g_1 : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ così definita

$$\forall x \in [-1, 0] : g_1(x) = f|_{R_1}(x, y) = f(x, 1) = 2x^3 + x^2 - 4.$$

Per ogni $x \in [-1, 0]$ calcolo

$$g_1'(x) = 6x^2 + 2x$$

e studio il segno della derivata prima di g_1. Poichè $g_1'(x) > 0$ per $x \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$, si ha che $x = -\frac{1}{3}$ è punto di massimo relativo per g_1 e $g_1\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{107}{27}$ è massimo relativo per g_1. Considero $g_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ così definita

$$\forall y \in [-1, 1] : g_2(y) = f|_{R_2}(x, y) = f(0, y) = y^2 - 5.$$

Per ogni $y \in [-1, 1]$ calcolo

$$g_2'(x) = 2y$$

e studio il segno della derivata prima di g_2. Poichè $g_2'(x) > 0$ per $y \in [0, 1]$, si ha che $x = 0$ è punto di minimo relativo per g_2 e $g_2(0) = -5$ è minimo relativo per g_2. Considero $g_3 : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ così definita

$$\forall x \in [-1, 0] : g_3(x) = f|_{R_3}(x, y) = f(x, -1) = 2x^3 + x^2 - 4.$$

Per ogni $x \in [-1, 0]$ calcolo

$$g_3'(x) = 6x^2 + 2x$$

e studio il segno della derivata prima di g_3. Poichè $g_3'(x) > 0$ per $x \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$, si ha che $x = -\frac{1}{3}$ è punto di massimo relativo per g_3 e $g_3\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{107}{27}$ è massimo relativo per g_3. Considero $g_4 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ così definita

$$\forall y \in [-1, 1] : g_4(y) = f|_{R_4}(x, y) = f(-1, y) = y^2 - 6.$$

Per ogni $y \in [-1, 1]$ calcolo

$$g_4'(x) = 2y$$

e studio il segno della derivata prima di g_4. Poichè $g_4'(x) > 0$ per $y \in [0, 1]$, si ha che $x = 0$ è punto di minimo relativo per g_4 e $g_4(0) = -6$ è minimo relativo per g_4. Quindi $P_2\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ e $P_3\left(-\frac{1}{3}, -1\right)$ sono punti di massimo assoluto per f e $f(P_2) = f(P_3) = -\frac{107}{27}$ è il massimo assoluto per f, mentre $P_4(-1, 0)$ è un punto di minimo assoluto per f e $f(P_4) = -6$ è il minimo assoluto per f.

Integrali doppi

1. *Calcolare il seguente integrale*

$$\int\int_D \frac{1}{(x + y + 1)^2} dxdy$$

ove D è la parte di piano delimitata dalla curva $y = 2\sqrt{x}$ e dalle rette $y = 0$, $y = x - 1$ e $y = 3 - x$.

Risoluzione L'insieme D non è un dominio normale nè rispetto all'asse x nè rispetto all'asse y, ma possiamo scriverlo come $D = D_1 \cup D_2$ ove D_1 e D_2 sono i seguenti domini normali rispetto all'asse x

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\, 2\sqrt{x} \le y \le 0\right\} \\ D_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2,\, 3-x \le y \le x-1\right\}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int\int_D \frac{1}{(x+y+1)^2} dxdy &= \int\int_{D_1} \frac{1}{(x+y+1)^2} dxdy + \int\int_{D_2} \frac{1}{(x+y+1)^2} dxdy = \\ &= \int_0^1 \left(\int_{2\sqrt{x}}^0 \frac{1}{(x+y+1)^2} dy\right) dx + \int_1^2 \left(\int_{3-x}^{x-1} \frac{1}{(x+y+1)^2} dy\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{x+y+1}\right]_{2\sqrt{x}}^0 dx + \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y+1}\right]_{3-x}^{x-1} dx = \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2\sqrt{x}+1}\right) dx + \int_1^2 \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\right) dx = \\ &= -\left[\log|x+1|\right]_0^1 + \log 4 - 1 - \frac{1}{2}\left[\log|x|\right]_1^2 + \frac{1}{4}\left[x\right]_1^2 = \\ &= -\log 2 + \log 4 - 1 - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4} = \log 2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x+2\sqrt{x}+1} dx &= \int_0^1 \frac{2t}{t^2+2t+1} dt = \int_0^1 \frac{2t+2-2}{t^2+2t+1} dt = \int_0^1 \frac{2t+2}{t^2+2t+1} dt - 2\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2} dt = \\ &= \left[\log\left(t^2+2t+1\right)\right]_0^1 + 2\left[\frac{1}{t+1}\right]_0^1 = \log 4 + 1 - 2 = \log 4 - 1 \end{aligned}$$

ove ho posto $t = \sqrt{x}$.

Forme differenziali

1. *Data la forma differenziale*

$$\omega(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} dx - \frac{2x}{x^2+y^2} dy$$

stabilire se essa è esatta.

Risoluzione La forma differenziale ω è definita su $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vediamo se è chiusa. Calcolo

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2\left(x^2+y^2\right) - 4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2\left(x^2+y^2\right) + 4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{aligned}$$

Quindi, essendo $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}$, si ha che ω è chiusa. Ora considero una curva chiusa che giri intorno al punto $(0,0)$, per esempio la curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall t \in [0,2\pi] : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

e calcolo

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \frac{2\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} (-\sin t)\, dt - \int_0^{2\pi} \frac{2\cot s}{\sin^2 t + \cos^2 t} \cos t \; dt = \\ &= -2\int_0^{2\pi} \sin^2 t \; dt - 2\int_0^{2\pi} \cos^2 t \; dt = -4\pi. \end{aligned}$$

Essendo $\int_\gamma \omega \neq 0$, si ha che ω non è esatta.

2. *Data la forma differenziale*

$$\omega(x,y) = y \log(1+x)\, dx + (x+1)(\log(x+1) - 1)\, dy$$

stabilire se essa è esatta e in caso affermativo trovare una sua primitiva. Inoltre si calcoli l"integrale di ω *lungo la curva* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *tale che* $\varphi(t) = (t, 3t^2)$ *per ogni* $t \in [0,1]$.

Risoluzione L'insieme di definizione della forma differenziale ω è

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\}$$

che è un insieme stellato rispetto ad ogni suo punto. Vediamo se è chiusa. Calcolo

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y \log(1+x)) = \log(1+x) \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}((x+1)(\log(x+1)-1)) = \log(1+x) - 1 + (x+1)\frac{1}{x+1} = \log(1+x) \end{aligned}$$

Essendo $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}$, si ha che ω è chiusa e quindi ω è esatta. Cerco ora una sua primitiva. Considero il punto $O(0,0) \in \Omega$ e un punto $P(\overline{x}, \overline{y}) \in \Omega$ e un cammino γ che li congiunga, per esempio $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ove $\gamma_1 : [0, \overline{x}] \to \mathbb{R}^2$ e $\gamma_2 : [0, \overline{y}] \to \mathbb{R}^2$ sono così definite:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{con } 0 \le t \le \overline{x} \\ \gamma_2 &: \begin{cases} x = \overline{x} \\ y = t \end{cases} \qquad \text{con } 0 \le t \le \overline{y} \end{aligned}$$

Calcolo

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\overline{x}} 0 dt + \int_0^{\overline{y}} (\overline{x}+1)(\log(\overline{x}+1) - 1)\, dt = \overline{y}(\overline{x}+1)(\log(\overline{x}+1) - 1).$$

Pertanto una primitiva di ω è la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ così definita

$$\forall (x, y) \in \Omega : f(x, y) = y(x+1)(\log(x+1) - 1).$$

Calcoliamo ora l'integrale di ω lungo la curva $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\forall t \in [0,1] : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 3t^2 \end{cases}$$

ovvero calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_\varphi \omega &= \int_0^1 3t^2 \log(1+t)\, dt + \int_0^1 (t+1)(\log(t+1) - 1)\, 6t\ dt = \\ &= 3\int_0^1 3t^2 \log(1+t)\, dt + 3\int_0^1 2t \log(1+t)\, dt - 2\int_0^1 3t^2 dt - 3\int_0^1 2t\ dt = \\ &= 6\log 2 - 6 = 6(\log 2 - 1) \end{aligned}$$

ove gli integrali $\int_0^1 3t^2 \log(1+t)\, dt$ e $\int_0^1 2t \log(1+t)\, dt$ sono stati calcolati per parti.

Equazioni differenziali

1. *Risolvere la seguente equazione*

$$y^{(4)} - 16y = \cos(2x).$$

Risoluzione E' un'equazione differenziale lineare del IV ordine a coefficiente costanti non omogenea. Considero l'omogenea associata

$$y^{(4)} - 16y = 0.$$

Il polinomio caratteristico ad essa associato è

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 16$$

e le sue radici si trovano imponendo che

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2)\left(\lambda^2 + 4\right) = 0.$$

Allora le radici di $P(\lambda)$ sono $\lambda_1 = 2$ con molteplicità $m_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ con molteplicità $m_1 = 1$, $\lambda_1 = 2i$ con molteplicità $m_1 = 1$ e $\lambda_1 = -2i$ con molteplicità $m_1 = 1$. Quindi i 4 integrali indipendenti sono: e^{2x}, e^{-2x}, $\cos(2x)$ e $\sin(2x)$. Pertanto un integrale generale della omogenea associata è

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Essendo $\pm 2i$ radice del polinomio caratteristico, si ha che un integrale particolare della completa è dato da

$$\overline{y} = x\left(k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x)\right) \qquad \text{con } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Calcolo

$$\begin{array}{rcl}
\overline{y}' & = & k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x) - 2xk_1 \sin(2x) + 2xk_2 \cos(2x) \\
\overline{y}'' & = & -4k_1 \sin(2x) + 4k_2 \cos(2x) - 4xk_1 \cos(2x) - 4xk_2 \sin(2x) \\
\overline{y}''' & = & -12k_1 \cos(2x) - 12k_2 \sin(2x) + 8xk_1 \sin(2x) - 8xk_2 \cos(2x) \\
\overline{y}^{iv} & = & 32k_1 \sin(2x) - 32k_2 \cos(2x) + 16xk_1 \cos(2x) + 16xk_2 \sin(2x)
\end{array}$$

e impongo che $\overline{y}$ sia soluzione della completa, cioè

$$32k_1 \sin(2x) - 32k_2 \cos(2x) + 16xk_1 \cos(2x) + 16xk_2 \sin(2x) - 16xk_1 \cos(2x) - 16xk_2 \sin(2x) = \cos 2x$$

e quindi

$$32k_1 \sin(2x) - 32k_2 \cos(2x) = \cos(2x)$$

da cui, imponendo che

$$\begin{cases} 32k_1 = 0 \\ -32k_2 = 1 \end{cases}$$

ottengo che

$$\overline{y} = -\frac{1}{32} x \sin(2x)$$

è un integrale particolare della completa. Pertanto

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x) - \frac{1}{32} x \sin(2x), \qquad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

è un integrale generale della completa.

2. *Risolvere la seguente equazione*

$$y' = -2xy + xe^{-x^2}.$$

Risoluzione E' un'equazione differenziale lineare del I ordine non omogenea.
Considero l'omogenea associata

$$y' = -2xy$$

Calcolo

$$\int -2x dx = -x^2 + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$y = ce^{-x^2}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

è un integrale generale dell'omogenea associata. Ora calcolo

$$\int \frac{xe^{-x^2}}{e^{-x^2}} dx = \frac{x^2}{2} + c' \quad \text{ con } c' \in \mathbb{R}.$$

Pertanto

$$\overline{y} = \frac{x^2}{2} e^{-x^2}$$

è un integrale particolare della completa e quindi

$$y = ce^{-x^2} + \frac{x^2}{2} e^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

è un integrale generale della completa.

3. *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

Risoluzione L'equazione $y' = 2\sqrt{y}$ è un'equazione differenziale non lineare del I ordine a variabili separabili. Un integrale singolare è dato da $y = 0$ che è anche soluzione del problema di Cauchy perchè soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 0$. Ora separiamo le variabili

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1$$

e integriamo

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx$$

ottenendo

$$\sqrt{y} = x + c$$

da cui

$$y(x) = (x + c)^2, \quad c \in \mathbb{R}$$

che è un integrale generale dell'equazione differenziale. Ora imponiamo che sia soluzione del problema di Cauchy imponendo che soddisfi la condizione iniziale, cioè che

$$y(1) = 0$$

ovvero che

$$(1 + c)^2 = 0$$

da cui $c = -1$. Quindi

$$y(x) = (x - 1)^2$$

è un'altra soluzione del problema di Cauchy.