

Esercizio

Studiare il grafico della funzione $f(x) = \left| \log \frac{x-2}{x+3} - 1 \right|$ tracciandone un grafico approssimativo.

Risoluzione Procediamo secondo lo schema:

1. La funzione logaritmo è definita quando l'argomento è strettamente positivo, quindi devo imporre che

$$\frac{x-2}{x+3} > 0$$

ottenendo che l'insieme di definizione della funzione f è $X_f =]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$.

2. L'insieme X_f non presenta alcuna simmetria nè periodicità, quindi la funzione f non è pari nè dispari nè periodica.
3. La funzione è sempre positiva e si annulla per $\log \frac{x-2}{x+3} - 1 = 0$, ovvero in $A \left(-\frac{3e+2}{e-1}, 0 \right)$, punto di intersezione tra f e l'asse x . Poichè $0 \notin X_f$, la funzione non ha intersezioni con l'asse y .
4. La funzione è continua in tutto X_f . Calcoliamo gli asintoti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 1, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 1. \end{aligned}$$

Pertanto le rette $x = -3$ e $x = 2$ sono asintoti verticali per f , mentre la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale per f .

5. La funzione f è derivabile in $X_f \setminus \left\{ -\frac{3e+2}{e-1} \right\}$ e in tale insieme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\log \frac{x-2}{x+3} - 1}{\left| \log \frac{x-2}{x+3} - 1 \right|} D \left(\log \frac{x-2}{x+3} - 1 \right) = \\ &= \frac{\log \frac{x-2}{x+3} - 1}{\left| \log \frac{x-2}{x+3} - 1 \right|} \frac{5}{(x-2)(x+3)}. \end{aligned}$$

Studio il segno della derivata prima. Essendo $(x-2)(x+3) > 0$ per ogni $x \in X_f$, allora

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log \frac{x-2}{x+3} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3e+2}{e-1}.$$

Quindi $f'(x) > 0$ se $x \in \left] -\frac{3e+2}{e-1}, -3 \right[$, mentre $f'(x) < 0$ se $x \in \left] -\infty, -\frac{3e+2}{e-1} \right[\cup]2, +\infty[$, cioè f è strettamente crescente in $\left] -\frac{3e+2}{e-1}, -3 \right[$ e strettamente decrescente in $\left] -\infty, -\frac{3e+2}{e-1} \right[\cup]2, +\infty[$.

6. Pertanto $x_0 = -\frac{3e+2}{e-1}$ è un punto di minimo relativo per f e 0 è un minimo relativo per f . Ma in questo punto f non è derivabile, infatti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = -\frac{(e-1)^2}{5e} \neq \frac{(e-1)^2}{5e} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x).$$

7. Inoltre $x_0 = -\frac{3e+2}{e-1}$ è un punto di minimo assoluto (vedi 3. e 4.). La funzione f non ha massimi assoluti poichè ha asintoti verticali verso l'alto.
8. La funzione f è derivabile 2 volte in $X_f \setminus \left\{ -\frac{3e+2}{e-1} \right\}$ e in tale insieme

$$f''(x) = -\frac{5(2x+1)}{(x-2)^2(x+3)^2} \frac{\log \frac{x-2}{x+3} - 1}{\left| \log \frac{x-2}{x+3} - 1 \right|}.$$

Studio il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow (2x+1) \left(\log \frac{x-2}{x+3} - 1 \right) < 0.$$

Quindi $f''(x) > 0$ se $x \in \left] -\frac{3e+2}{e-1}, -3 \right[\cup]2, +\infty[$, mentre $f''(x) < 0$ se $x \in \left] -\infty, -\frac{3e+2}{e-1} \right[$, cioè f è strettamente convessa in $\left] -\frac{3e+2}{e-1}, -3 \right[\cup]2, +\infty[$ e strettamente concava in $\left] -\infty, -\frac{3e+2}{e-1} \right[$. Quindi $x_0 = -\frac{3e+2}{e-1}$ è un punto di flesso ascendente per f .

9. Tracciamo un grafico approssimativo della funzione:

