Equazioni differenziali

1. *Risolvere la seguente equazione*

$$y' = 2x \cos^2 y.$$

Risoluzione E' un'equazione differenziale a variabili separabili. Sono integrali singolari $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Separiamo le variabili

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 2x$$

e integriamo ottenendo

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int 2x \ dx$$

da cui si ha

$$\tan y = x^2 + c$$

e quindi

$$y = \arctan\left(x^2 + c\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

è integrale generale della nostra equazione differenziale.

2. *Risolvere la seguente equazione*

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Risoluzione Pongo $z = \frac{y}{x}$. Si ha quindi che

$$y = zx \tag{1}$$

e che $y' = z + xz'$. Quindi l'equazione diventa

$$z + xz' = \frac{1}{z} + z$$

ovvero

$$z' = \frac{1}{xz} \tag{2}$$

che è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili. Separiamo le variabili

$$zz' = \frac{1}{x}$$

e integriamo

$$\int z \ dz = \int \frac{1}{x} dx$$

ottenendo pertanto che

$$\frac{z^2}{2} = \log|x| + c$$

ovvero che

$$z = \sqrt{2\log|x| + c}$$

con $c \in \mathbb{R}$, è integrale generale dell'equazione (2). Quindi, per la (1) si ha che

$$y = x\sqrt{2\log|x| + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

è integrale generale dell'equazione differenziale di partenza.

3. *Risolvere la seguente equazione*

$$y' = (x + y - 5)^2.$$

Risoluzione Pongo $z = x + y$. Si ha quindi che

$$y = z - x \tag{3}$$

e che $y' = z' - 1$. Pertanto l'equazione diventa

$$z' = (z - 5)^2 + 1$$

ovvero

$$z' = z^2 - 10z + 26 \tag{4}$$

che è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili. Separiamo le variabili

$$\frac{z'}{z^2 - 10z + 26} = 1$$

e integriamo ottenendo

$$\int \frac{dz}{z^2 - 10z + 26} = \int dx$$

ovvero

$$\int \frac{dz}{z^2 - 10z + 25 + 1} = x + c$$

e quindi

$$\int \frac{dz}{(z - 5)^2 + 1} = x + c$$

da cui si ottiene

$$\arctan(z - 5) = x + c$$

e quindi l'integrale generale di (4) è

$$z = \tan(x + c) + 5.$$

Pertanto, per la (3) si ha che

$$y = \tan(x + c) + 5 - x, \quad c \in \mathbb{R}$$

è integrale generale della nostra equazione di partenza.

4. *Risolvere la seguente equazione*

$$y' = (\cos x)\, y + e^{\sin x} \log x.$$

Risoluzione E' un'equazione differenziale lineare del I ordine non omogenea.
Considero l'omogenea associata

$$y' = (\cos x)\, y.$$

Calcolo

$$\int \cos x \; dx = \sin x + c.$$

Quindi un integrale generale dell'omogenea associata sarà

$$y = ce^{\sin x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ora calcolo

$$\int \frac{e^{\sin x} \log x}{e^{\sin x}} dx = \int \log x \; dx = x \log x - x + c.$$

Quindi un integrale particolare della completa sarà

$$\overline{y} = e^{\sin x} \left(x \log x - x \right).$$

Pertanto

$$y = ce^{\sin x} + e^{\sin x} \left(x \log x - x \right).$$

5. *Risolvere la seguente equazione*

$$y' = (-\tan x)\, y + y^2 \sqrt{\sin x}.$$

Risoluzione E' un'equazione differenziale del I ordine di Bernoulli. Pongo

$$z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$$

da cui

$$y = \frac{1}{z}. \tag{5}$$

Quindi l'equazione diventa

$$z' = (\tan x)\, z - \sqrt{\sin x} \tag{6}$$

che è un'equazione differenziale del I ordine lineare non omogenea. Considero l'omogenea associata

$$z' = (\tan x)\, z.$$

Il suo integrale generale è dato da

$$z = \frac{c}{\cos x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ora calcolo

$$\int -\sqrt{\sin x} \cos x \, dx = -\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + c.$$

Quindi un integrale particolare di (6) è

$$\overline{z} = -\frac{2}{3\cos x}\sqrt{\sin^3 x}.$$

Pertanto un integrale generale di (6) è

$$z = \frac{c}{\cos x} - \frac{2}{3\cos x}\sqrt{\sin^3 x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Allora, per la (5), si ha che

$$y = \frac{\cos x}{c - \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

è un integrale generale dell'equazione di partenza.

6. *Risolvere la seguente equazione*

$$y'' + 9y = 0.$$

Risoluzione E' un'equazione differenziale del II ordine lineare omogenea. Considero il polinomio caratteristico ad essa associato

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 9.$$

Risolvo l'equazione caratteristica

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 9 = 0$$

e trovo due radici: $\lambda_1 = -3i$ con molteplicità $m_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3i$ con molteplicità $m_2 = 1$. Quindi ho 2 integrali indipendenti: $\cos(3x)$ e $\sin(3x)$. Pertanto un integrale generale dell'equazione è dato da

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

7. *Risolvere la seguente equazione*

$$y''' - y'' = 3x^2 + x.$$

Risoluzione E' un'equazione differenziale del III ordine lineare non omogenea.
Considero l'omogenea associata

$$y''' - y'' = 0.$$

Considero il polinomio caratteristico ad essa associato

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2.$$

Risolvo l'equazione caratteristica

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 (\lambda - 1) = 0$$

e trovo due radici: $\lambda_1 = 0$ con molteplicità $m_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità $m_2 = 1$. Quindi ho 3 integrali indipendenti: 1, x e e^x. Pertanto un integrale generale dell'equazione è dato da

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Ora cerco un integrale particolare della completa. Poichè 0 è radice del polinomio caratteristico, allora

$$\overline{y} = x^2 R(x)$$

con $R(x)$ polinomio di $gr(R) \leq 2$ sarà un integrale particolare della completa. Il generico polinomio sarà

$$R(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Quindi un integrale particolare della completa sarà

$$\overline{y} = x^2 \left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \right)$$

e impongo che sia soluzione della completa. Calcolo

$$\begin{aligned} \overline{y}' &= 4a_2 x^3 + 3a_1 x^2 + 2a_0 x \\ \overline{y}'' &= 12a_2 x^2 + 6a_1 x + 2a_0 \\ \overline{y}''' &= 24a_2 x + 6a_1. \end{aligned}$$

Affinchè $\overline{y}$ sia soluzione della completa deve essere

$$24a_2 x + 6a_1 - 12a_2 x^2 - 6a_1 x - 2a_0 = 3x^2 + x$$

ovvero

$$-12a_2 x^2 + (24a_2 - 6a_1) x + 6a_1 - 2a_0 = 3x^2 + x,$$

quindi, per il principio di identità dei polinomi, si ha

$$\begin{cases} -12a_2 = 3 \\ 24a_2 - 6a_1 = 1 \\ 6a_1 - 2a_0 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a_0 = -\frac{7}{2} \\ a_1 = -\frac{7}{6} \\ a_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Quindi

$$\overline{y} = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{2}x^2$$

è un integrale particolare della completa. Pertanto un integrale generale della completa sarà

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x - \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{2}x^2, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

8. *Risolvere la seguente equazione*

$$y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x.$$

Risoluzione E' un'equazione differenziale del II ordine lineare non omogenea. Considero l'omogenea associata

$$y'' - 4y = 0.$$

Considero il polinomio caratteristico ad essa associato

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4.$$

Risolvo l'equazione caratteristica

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$$

e trovo due radici: $\lambda_1 = 2$ con molteplicità $m_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$ con molteplicità $m_2 = 1$. Quindi ho 2 integrali indipendenti: e^{-2x} e e^{2x}. Pertanto un integrale generale dell'equazione è dato

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ora cerco un integrale particolare della completa. Poichè $2 \pm 2i$ non è radice del polinomio caratteristico, allora

$$\overline{y} = e^{2x}(k_1 \sin 2x + k_2 \cos 2x)$$

sarà un integrale particolare della completa. Calcolo

$$\begin{aligned} \overline{y}' &= 2k_1 e^{2x} \sin 2x + 2k_1 e^{2x} \cos 2x + 2k_2 e^{2x} \cos 2x - 2k_2 e^{2x} \sin 2x \\ \overline{y}'' &= 8k_1 e^{2x} \cos 2x - 8k_2 e^{2x} \sin 2x \end{aligned}$$

e impongo che $\overline{y}$ sia soluzione della completa:

$$8k_1e^{2x}\cos 2x - 8k_2e^{2x}\sin 2x - 4k_1e^{2x}\sin 2x - 4k_2e^{2x}\cos 2x = e^{2x}\sin 2x$$

ovvero

$$(8k_1 - 4k_2)\cos 2x + (-8k_2 - 4k_1)\sin 2x = \sin 2x.$$

da cui

$$\begin{cases} 8k_1 - 4k_2 = 0 \\ -8k_2 - 4k_1 = 1 \end{cases}.$$

e quindi

$$\begin{cases} k_1 = -\frac{1}{20} \\ k_2 = -\frac{1}{10} \end{cases}.$$

Allora un integrale particolare della completa sarà

$$\overline{y} = -\frac{1}{20}e^{2x}\sin 2x - \frac{1}{10}e^{2x}\cos 2x.$$

Pertanto un integrale generale della completa è dato da

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} - \frac{1}{20}e^{2x}\sin 2x - \frac{1}{10}e^{2x}\cos 2x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

9. *Risolvere la seguente equazione*

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x}.$$

Risoluzione E' un'equazione differenziale del II ordine lineare non omogenea.
Considero l'omogenea associata

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Considero il polinomio caratteristico ad essa associato

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1.$$

Risolvo l'equazione caratteristica

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^3 = 0$$

e trovo una radice $\lambda_0 = 1$ con molteplicità $m_0 = 3$. Quindi ho 3 integrali indipendenti: e^x, xe^x e x^2e^x. Pertanto un integrale generale dell'equazione è dato da

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Cerco un integrale particolare della completa. Considero il Wronskiano di questi 3 integrali indipendenti:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & e^x+xe^x & 2xe^x+x^2e^x \\ e^x & 2e^x+xe^x & 2e^x+4xe^x+x^2e^x \end{vmatrix}=2e^{3x}.$$

Ora trovo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \gamma_1'(x)\,e^x+\gamma_2'(x)\,xe^x+\gamma_3'(x)\,x^2e^x=0 \\ \gamma_1'(x)\,e^x+\gamma_2'(x)\,(e^x+xe^x)+\gamma_3'(x)\left(2xe^x+x^2e^x\right)=0 \\ \gamma_1'(x)\,e^x+\gamma_2'(x)\,(2e^x+xe^x)+\gamma_3'(x)\left(2e^x+4xe^x+x^2e^x\right)=\frac{e^x}{x} \end{cases}$$

con Cramer che sono date da

$$\begin{aligned} \gamma_1'(x) &= \frac{x}{2} \\ \gamma_2'(x) &= 1 \\ \gamma_3'(x) &= \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

Quindi, integrando queste soluzioni, ottengo

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= \frac{x^2}{4} \\ \gamma_2(x) &= x \\ \gamma_3(x) &= \frac{1}{2}\log|x| \end{aligned}$$

Pertanto un integrale particolare della completa sarà

$$\overline{y}=\frac{x^2}{4}e^x+x^2e^x+\frac{1}{2}x^2e^x\log|x|$$

e un integrale generale della completa sarà dato da

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+\frac{x^2}{4}e^x+x^2e^x+\frac{1}{2}x^2e^x\log|x|\,,\quad c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}.$$

10. *Risolvere la seguente equazione*

$$y''+2y'-3y=2e^x+x+3.$$

Risoluzione E' un'equazione differenziale del II ordine lineare non omogenea. Considero l'omogenea associata

$$y''+2y'-3y=0.$$

Considero il polinomio caratteristico ad essa associato

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3.$$

Risolvo l'equazione caratteristica

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

e trovo due radici: $\lambda_1 = 1$ con molteplicità $m_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$ con molteplicità $m_2 = 1$. Quindi ho 2 integrali indipendenti: e^x e e^{-3x}. Pertanto un integrale generale dell'equazione è dato

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Un integrale particolare della completa sarà

$$\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2$$

con $\overline{y}_1$ e $\overline{y}_2$ rispettivamente integrali particolari delle equazioni

$$y'' + 2y' - 3y = 2e^x \tag{7}$$

$$y'' + 2y' - 3y = x + 3 \tag{8}$$

Poichè 1 è radice del polinomio caratteristico, un integrale particolare della (7) sarà

$$\overline{y}_1 = k_1 x e^x, \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

Calcolo

$$\begin{aligned} \overline{y}_1' &= k_1 e^x + k_1 x e^x \\ \overline{y}_1'' &= 2k_1 e^x + k_1 x e^x \end{aligned}$$

e impongo che $\overline{y}_1$ sia soluzione della (7), cioè che

$$2k_1 e^x + k_1 x e^x + 2k_1 e^x + 2k_1 x e^x - 3k_1 x e^x = 2e^x$$

ovvero

$$4k_1 = 2$$

da cui

$$k_1 = \frac{1}{2}.$$

Quindi un integrale particolare della (7) sarà

$$\overline{y}_1 = \frac{1}{2} x e^x.$$

Ora cerco un integrale particolare della (8). Poichè 0 non è radice del polinomio caratteristico, si ha che

$$\overline{y}_2 = a_1 x + a_0 \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

è un integrale particolare della (8). Calcolo

$$\begin{aligned}\overline{y}_2' &= a_1\\ \overline{y}_2'' &= 0\end{aligned}$$

e impongo che $\overline{y}_2$ sia soluzione della (8) ottenendo

$$2a_1 - 3a_1x - 3a_0 = x + 3$$

ovvero

$$-3a_1x + 2a_1 - 3a_0 = x + 3$$

da cui

$$\begin{cases} -3a_1 = 1\\ 2a_1 - 3a_0 = 3\end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{3}\\ a_0 = -\frac{11}{6}\end{cases}.$$

Allora un integrale particolare della (8) sarà dato da

$$\overline{y}_2 = -\frac{1}{3}x - \frac{11}{6}.$$

Pertanto un integrale particolare dell'equazione di partenza sarà

$$\overline{y} = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{3}x - \frac{11}{6}$$

e quindi

$$y = c_1e^x + c_2e^{-3x}\frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{3}x - \frac{11}{6}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

sarà un integrale generale dell'equazione di partenza.

11. *Risolvere la seguente equazione*

$$y'' = \sqrt{1-(y')^2}.$$

Risoluzione E' un'equazione differenziale del II ordine non lineare. Pongo

$$y' = z. \tag{9}$$

L'equazione diventa

$$z' = \sqrt{1-z^2} \tag{10}$$

che è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili. Gli integrali singolari della (10) sono dati da $z = -1$ e $z = 1$, da cui, per la (9)

$$y = x + c,\ y = -x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

sono integrali singolari dell'equazione di partenza. Ora separiamo le variabili

$$\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}} = 1$$

e integriamo

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int dx$$

da cui si ottiene

$$\arcsin z = x + c_1$$

e quindi

$$z = \sin(x + c_1), \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

è un integrale generale della (10). Ma, per la (9), si ha allora che

$$y' = \sin(x + c_1)$$

da cui, integrando, si ottiene

$$y = \cos(x + c_1) + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

che è un integrale generale dell'equazione di partenza.

12. *Risolvere la seguente equazione*

$$y'' = \frac{1}{x} y' + x.$$

Risoluzione E' un'equazione differenziale del II ordine lineare non omogenea a coefficienti non costanti. Pongo

$$y' = z. \tag{11}$$

L'equazione diventa

$$z' = \frac{1}{x} z + x \tag{12}$$

che è un'equazione differenziale del I ordine lineare non omogenea. Considero l'omogenea associata

$$z' = \frac{1}{x} z. \tag{13}$$

Calcolo

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi un integrale generale dell'omogenea (13) sarà

$$z = cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ora calcolo

$$\int \frac{x}{x} dx = x + c', \quad c' \in \mathbb{R}.$$

Pertanto un integrale particolare della completa (12) sarà

$$\overline{z} = x^2$$

e un integrale generale della (12) sarà dato da

$$z = cx + x^2, \quad c \in \mathbb{R}$$

ovvero, per la (11), si ha

$$y' = cx + x^2$$

da cui integrando si ottiene

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{x^3}{3} + c', \quad c, c' \in \mathbb{R}$$

che è un integrale generale dell'equazione di partenza.