Studio di una funzione

Studiare il grafico della funzione $f(x) = \arcsin\left|e^{2x}-1\right|$ *tracciandone un grafico approssimativo.*

Risoluzione Procediamo secondo lo schema:

1. La funzione arcseno è definita quando l'argomento è compreso tra -1 e 1, quindi devo imporre che
$$-1 \leq \left|e^{2x}-1\right| \leq 1$$
ottenendo che l'insieme di definizione della funzione f è $X_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\log 2\right]$.
2. L'insieme X_f non presenta alcuna simmetria nè periodicità, quindi la funzione f non è pari nè dispari nè periodica.
3. La funzione si annulla per $\arcsin\left|e^{2x}-1\right| = 0$, ovvero in $A(0,0)$, punto di intersezione tra f e l'asse x e che è anche intersezione della funzione con l'asse y. Studiamo il segno della funzione:
$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \left|e^{2x}-1\right| \leq 1.$$
Quindi la funzione f è sempre positiva.
4. La funzione è continua in tutto X_f. Calcoliamo gli asintoti:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$
Pertanto la retta $y = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale per f; inoltre la funzione non ha asintoti verticali.
5. Vediamo dove la funzione è derivabile. Devo escludere i punti per cui la funzione arcseno e la funzione valore assoluto non sono derivabili, ovvero i punti tali che
$$\begin{array}{rcl} e^{2x}-1 &=& 0 \\ \left|e^{2x}-1\right| &=& \pm 1 \end{array}$$
cioè i punti $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}\log 2$. Quindi la funzione f è derivabile in $\left]-\infty, \frac{1}{2}\log 2\right[\setminus \{0\}$ e si ha
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}} & \text{se } x \in \left]0, \frac{1}{2}\log 2\right[\\ -\frac{2e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}} & \text{se } x \in \left]-\infty, 0\right[\end{cases}.$$
Studiando il segno della derivata prima, si ha che f è strettamente crescente in $\left]0, \frac{1}{2}\log 2\right[$ e strettamente decrescente in $]-\infty, 0[$.

6. Essendo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{2e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

   si ha che f non è derivabile in $x = 0$ che pertanto risulta un punto angoloso. Ma $x = 0$ è un punto di minimo relativo per f e 0 è un minimo relativo per f.

7. Anzi, essendo la funzione f sempre positiva, si ha che $x = 0$ è un punto di minimo assoluto per la funzione e 0 è il minimo assoluto per f. Inoltre, essendo $y = \frac{\pi}{2}$ un asintoto orizzontale, si ha che la funzione è limitata anche superiormente. Anzi, $\frac{\pi}{2}$ è il massimo assoluto per f essendo $f(\frac{1}{2}\log 2) = \frac{\pi}{2}$.

8. La funzione f è derivabile 2 volte in $\left]-\infty, \frac{1}{2}\log 2\right[\setminus \{0\}$ e si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4e^x}{(2-e^{2x})\sqrt{2-e^{2x}}} & \text{se } x \in \left]0, \frac{1}{2}\log 2\right[\\ -\frac{4e^x}{(2-e^{2x})\sqrt{2-e^{2x}}} & \text{se } x \in \left]-\infty, 0\right[\end{cases}.$$

   Studiando il segno della derivata seconda si ha che f è strettamente convessa in $\left]0, \frac{1}{2}\log 2\right[$ e strettamente concava in $]-\infty, 0[$. Quindi $x = 0$ è punto di flesso ascendente per f.

9. Tracciamo un grafico approssimativo della funzione: