

Esercizi su massimi e minimi

1. *Studiare massimi e minimi relativi della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x.$$

Risoluzione La funzione f è derivabile in tutto \mathbb{R}^2 e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x + y + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y + x. \end{aligned}$$

Cerco i punti stazionari di f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

ovvero risolvo il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è data dalla coppia $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, cioè dal punto $P(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Studiamo ora la natura di tale punto. Anzitutto la funzione f è derivabile 2 volte in tutto \mathbb{R}^2 . Calcoliamo per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1.$$

Quindi la matrice Hessiana della f nel punto P è data da

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, essendo $\det H_f(P) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) > 0$, si ha che P è un punto di minimo relativo per f .

2. *Studiare massimi e minimi relativi della funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = x^2z + yz + xy.$$

Risoluzione La funzione f è derivabile in tutto \mathbb{R}^3 e per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2xz + y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= z + x \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= x^2 + y.\end{aligned}$$

Cerco i punti stazionari di f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ovvero risolvo il sistema

$$\begin{cases} 2xz + y = 0 \\ z + x = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è data dalla terna $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 0)$, cioè dal punto $P(0, 0, 0)$. Studiamo ora la natura di tale punto. Anzitutto la funzione f è derivabile 2 volte in tutto \mathbb{R}^3 . Calcoliamo per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= 2z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = 1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = 2x, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = 1.\end{aligned}$$

Quindi la matrice Hessiana della f nel punto P è data da

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det H_f(P) = 0$, per studiare la natura del punto P devo procedere per un'altra strada. In un intorno sferico di $O(0, 0, 0)$, se per esempio considero dei punti $P(x, y, z)$ con $x > 0, y > 0, z > 0$, avrò che $f(x, y, z) > 0 = f(0, 0, 0)$, invece per punti $P(x, y, z)$ con $x < 0, y > 0, z < 0$, avrò che $f(x, y, z) < 0 = f(0, 0, 0)$. Pertanto $O(0, 0, 0)$ è un punto di sella.

3. Studiare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y) = (x^2 - y^2)(x - 2)$ nel triangolo A di vertici $O(0, 0)$, $P(2, 2)$ e $Q(2, -2)$.

Risoluzione La funzione f è derivabile in tutto \mathbb{R}^2 e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x(x-2) + x^2 - y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2y(x-2).\end{aligned}$$

Cerco i punti stazionari di f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

ovvero risolvo il sistema

$$\begin{cases} 2x(x-2) + x^2 - y^2 = 0 \\ -2y(x-2) = 0 \end{cases}$$

che equivale a risolvere due sistemi:

$$(S_1) \begin{cases} x = 2 \\ x^2 = y^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad (S_2) \begin{cases} y = 0 \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases} .$$

Il sistema (S_1) mi dà soluzioni non interne ad A . Invece il sistema (S_2) si sdoppia in altri due sistemi:

$$(S_2') \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (S_2'') \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} .$$

Il sistema (S_2') mi dà una soluzione non interna ad A . Invece il sistema (S_2'') mi dà la soluzione $P_0(\frac{4}{3}, 0)$. Calcolo $f(P_0) = -\frac{32}{27}$. Considero ora $Fr(A) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ove

$$\begin{aligned}A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, y = x\}, \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, y = -x\}, \\ A_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2, -2 \leq y \leq 2\}.\end{aligned}$$

Si vede che $f|_{A_1} \equiv 0$, $f|_{A_2} \equiv 0$, $f|_{A_3} \equiv 0$. Quindi P_0 è un punto di minimo assoluto per f in A e $f(P_0) = -\frac{32}{27}$ è il minimo assoluto per f in A e tutti i punti di $Fr(A)$ sono punti di massimo assoluto per f in A e 0 è il massimo assoluto per f in A .

4. *Studiare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$ nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$.*

Risoluzione La funzione f è derivabile in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y.\end{aligned}$$

Cerco i punti stazionari di f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

ovvero risolvo il sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y = 0 \end{cases}$$

che non dà soluzioni. Vediamo se f è derivabile in $(0, 0)$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t} - 1 + 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + t^2} - 1 + 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{|t|}{t} + t \right). \end{aligned}$$

Poichè non esiste $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t}$, allora f non è derivabile in $(0, 0)$. Ma $f(0, 0) = -1$. Ora vediamo cosa succede sulla frontiera di A , cioè su

$$Fr(A) : \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Per ogni $(x, y) \in Fr(A)$

$$f|_{Fr(A)}(x, y) = f(3 \cos t, 3 \sin t) = F(t),$$

ciò considero la funzione $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita

$$\forall t \in [0, 2\pi] : F(t) = f(3 \cos t, 3 \sin t) = 2 + 9 \sin^2 t.$$

Agli estremi: $F(0) = F(2\pi) = 2$. Ora cerchiamo i punti di massimo e di minimo della funzione F . Per ogni $t \in [0, 2\pi]$ la funzione F è derivabile e si ha

$$F'(t) = 18 \sin t \cos t.$$

Quindi

$$F'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pi \text{ oppure } t = \frac{\pi}{2} \text{ oppure } t = \frac{3}{2}\pi.$$

In tali punti: $F(\pi) = 2$, $F(\frac{\pi}{2}) = 11$ e $F(\frac{3}{2}\pi) = 11$. Pertanto in corrispondenza di questi punti ho $P_0(0, 0)$ con $f(P_0) = -1$, $P_1(3, 0)$ con $f(P_1) = 2$, $P_2(-3, 0)$ con $f(P_2) = 2$, $P_3(0, 3)$ con $f(P_3) = 11$ e $P_4(0, -3)$ con $f(P_4) = 11$. Quindi P_3 e P_4 sono punti di massimo assoluto per f , mentre P_0 è punto di minimo assoluto per f .

5. Studiare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1$ nell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 \leq 0\}$.

Risoluzione La funzione f è derivabile in tutto \mathbb{R}^3 e per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2x - 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 2y \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 2z.\end{aligned}$$

Cerco i punti stazionari di f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ovvero risolvo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è data dalla terna $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1, 0, 0)$, cioè dal punto $P(1, 0, 0)$ che è interno ad A poichè le sue coordinate verificano $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 < 0$. Studiamo ora la natura di tale punto. Anzitutto la funzione f è derivabile 2 volte in tutto \mathbb{R}^3 . Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) &= 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P) = 2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(P) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(P) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(P) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(P) = 0.\end{aligned}$$

Quindi la matrice Hessiana della f nel punto P è data da

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, essendo $\det H_f(P) = 8 > 0$, $H_{2,f}(P) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = 2 > 0$, si ha che P è un punto di minimo relativo per f . Inoltre $f(P) = -2$ è un minimo relativo per f . Ora studiamo i massimi e i minimi sulla frontiera di A , cioè su

$$Fr(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0\}.$$

Cercare massimi e minimi su $Fr(A)$ equivale a cercare massimi e minimi vincolati della funzione f di vincolo $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2$. Pertanto devo cercare i massimi e minimi relativi della funzione

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 2).$$

I punti stazionari di F si ottengono imponendo che

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

ovvero che

$$\begin{cases} 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \\ 2z + 4\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Tale sistema equivale a 3 sistemi:

$$(S_1) \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}(1 + \lambda) = 1 \end{cases}, (S_2) \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}(1 + \lambda) = 1 \end{cases} \text{ e } (S_3) \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \\ 4 + 2z^2 - 2 = 0 \end{cases}.$$

I primi 2 sistemi ci danno come soluzioni i punti $P_1(\sqrt{2}, 0, 0)$ e $P_2(-\sqrt{2}, 0, 0)$, mentre il terzo non ha soluzioni. Per tali punti $f(P_1) = 1 - 2\sqrt{2}$ e $f(P_2) = 1 + 2\sqrt{2}$. Quindi P è punto di minimo assoluto per f , mentre P_2 è punto di massimo assoluto per f .