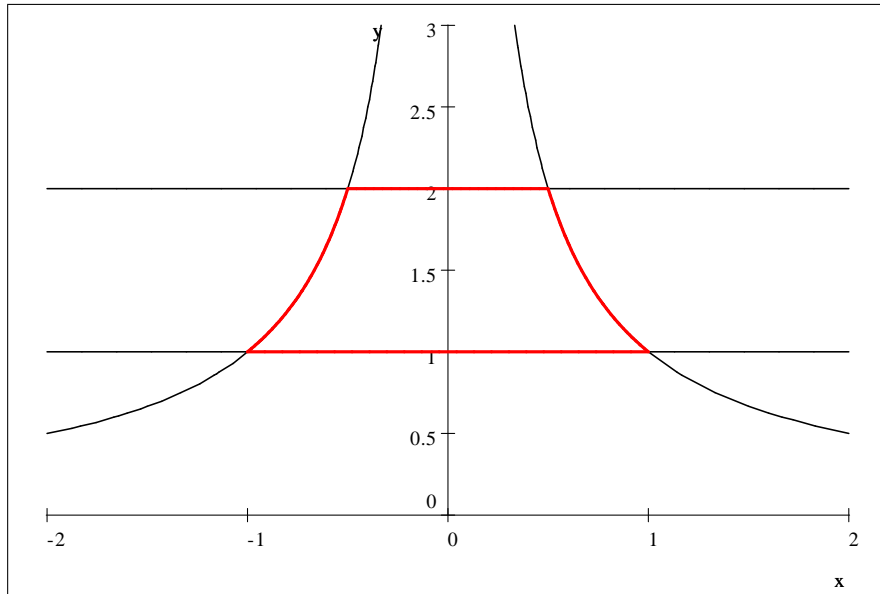


Esercizi sugli integrali doppi e tripli

1. Calcolare $\int \int_D \cos(xy) dx dy$ ove D è la parte di piano delimitata dalle rette $y = 1$ e $y = 2$ e dalle iperboli $xy = 1$ e $xy = -1$.

Risoluzione L'insieme D in figura



è un dominio non normale rispetto all'asse x , ma normale rispetto all'asse y . Infatti si può scrivere

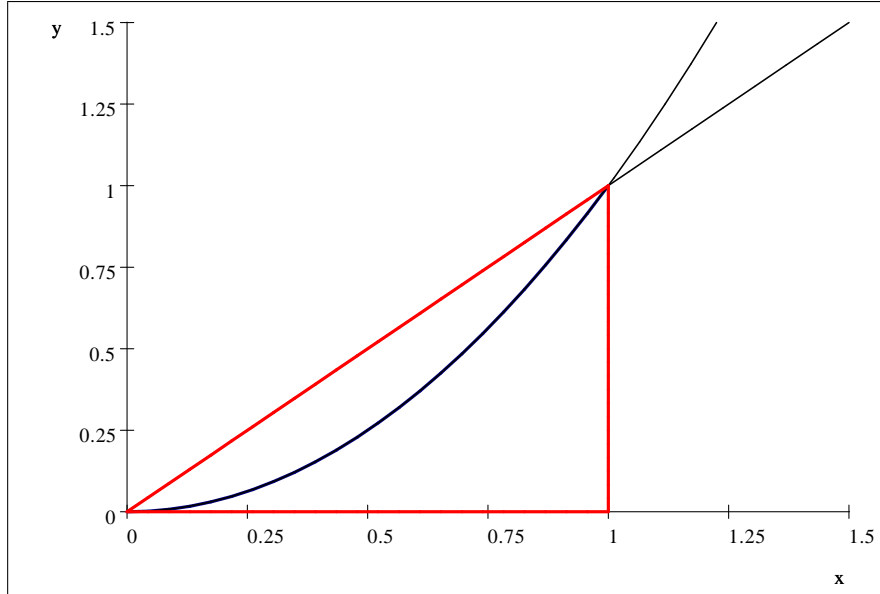
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2, -\frac{1}{y} \leq x \leq \frac{1}{y} \right\}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int \int_D \cos(xy) dx dy &= \int_1^2 \left(\int_{-\frac{1}{y}}^{\frac{1}{y}} \cos(xy) dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{\sin(xy)}{y} \right]_{-\frac{1}{y}}^{\frac{1}{y}} dy = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{\sin 1}{y} - \frac{\sin(-1)}{y} \right) dy = 2 \sin 1 [\log |y|]_1^2 = 2 \sin 1 \log 2. \end{aligned}$$

2. Calcolare $\int \int_D |y - x^2| dx dy$ ove D è la parte di piano delimitata dalle rette $y = x$, $y = 0$ e $x = 1$.

Risoluzione Posso considerare $D = D_1 \cup D_2$ come in figura



ove i segmenti in rosso racchiudono l'insieme D mentre la curva in blu è una porzione della parabola $y = x^2$ e gli insiemi

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$$

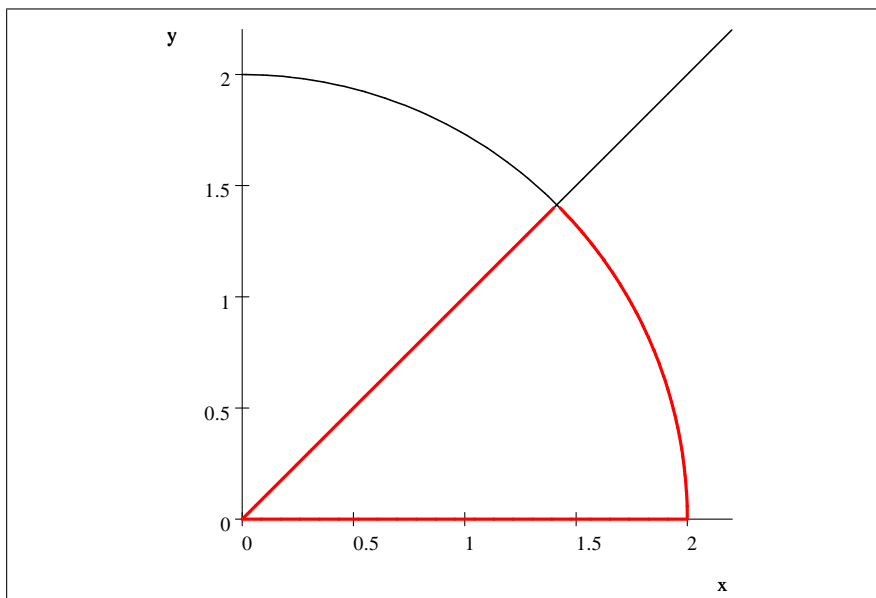
$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

sono domini normali rispetto all'asse x . Pertanto si ha

$$\begin{aligned} \int \int_D |y - x^2| dx dy &= \int \int_{D_1} (y - x^2) dx dy + \int \int_{D_2} (x^2 - y) dx dy = \\ &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (y - x^2) dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 - y) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - x^2 y \right]_{x^2}^x dx + \int_0^1 \left[x^2 y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} + x^4 \right) dx + \int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \\ &= \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{10} \right]_0^1 + \left[\frac{x^5}{10} \right]_0^1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{40}. \end{aligned}$$

3. Calcolare $\int \int_D \frac{x}{y+1} dx dy$ ove D è la parte di piano delimitata dalla circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio $r = 2$ e dalle rette $y = 0$ e $y = x$.

Risoluzione Notiamo dalla figura



che l'insieme D non è normale rispetto all'asse x , ma lo è rispetto all'asse y in quanto

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \sqrt{2}, y \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \right\}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{y+1} dx dy &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{y+1} dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{x^2}{2(y+1)} \right]_y^{\sqrt{4-y^2}} dy = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{4-y^2}{2(y+1)} dy - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{y^2}{2(y+1)} dy = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{y+1} dy - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{y^2}{y+1} dy = \\ &= 2 [\log |y+1|]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{y(y+1)-y^2}{y+1} dy = \\ &= 2 \log(\sqrt{2}+1) - \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{y+1-1}{y+1} dy = \\ &= 2 \log(\sqrt{2}+1) - 1 + [y]_0^{\sqrt{2}} - [\log(y+1)]_0^{\sqrt{2}} = \log(\sqrt{2}+1) - 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

4. Calcolare $\int \int_T z \sqrt{1-y^2} dx dy dz$ ove T è il cilindro avente come base la circonferenza unitaria nel piano xy e come altezza l'intervallo $[0, 1]$ sull'asse z .

Risoluzione Poichè il cilindro lo posso scrivere come

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\},$$

allora

$$\int \int \int_T z \sqrt{1-y^2} dx dy dz = \int_0^1 \left(\int \int_C z \sqrt{1-y^2} dx dy \right) dz = \int_0^1 z \left(\int \int_C \sqrt{1-y^2} dx dy \right) dz$$

ove C è la corona circolare

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

che in coordinate polari possiamo scrivere

$$C' = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Quindi

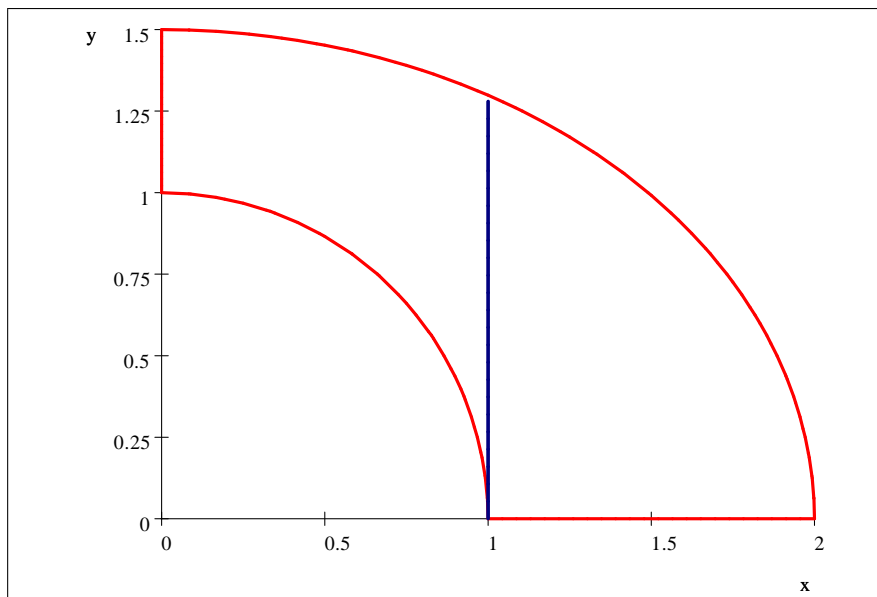
$$\begin{aligned} \int \int_C \sqrt{1-y^2} dx dy &= \int \int_{C'} \sqrt{1-\rho^2 \sin^2 \theta} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2 \sin^2 \theta} \rho d\rho \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2 \sin^2 \theta} \int_0^1 -2\rho \sin^2 \theta \sqrt{1-\rho^2 \sin^2 \theta} d\rho \right) d\theta = \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 \sin^2 \theta} \left[\sqrt{(1-\rho^2 \sin^2 \theta)^3} \right]_0^1 d\theta = \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 \sin^2 \theta} (\cos^3 \theta - 1) d\theta = -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \cos \theta - 1 \right) d\theta = \\ &= -\frac{1}{3} \left(\left[-\frac{1}{\sin \theta} \right]_0^{2\pi} - [\sin \theta]_0^{2\pi} - 2\pi \right) = \frac{2}{3} \pi. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int \int \int_T z \sqrt{1-y^2} dx dy dz = \int_0^1 \frac{2}{3} \pi z dz = \left[\frac{\pi}{3} z^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

5. Calcolare $\int \int_D (x-2y) dx dy$ ove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid x^2 + y^2 \geq 1, \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{9}y^2 \leq 1\}$.

Risoluzione Si può considerare l'insieme $D = D_1 \cup D_2$ come in figura



ove D_1 e D_2 sono due domini normali rispetto all'asse x così definiti

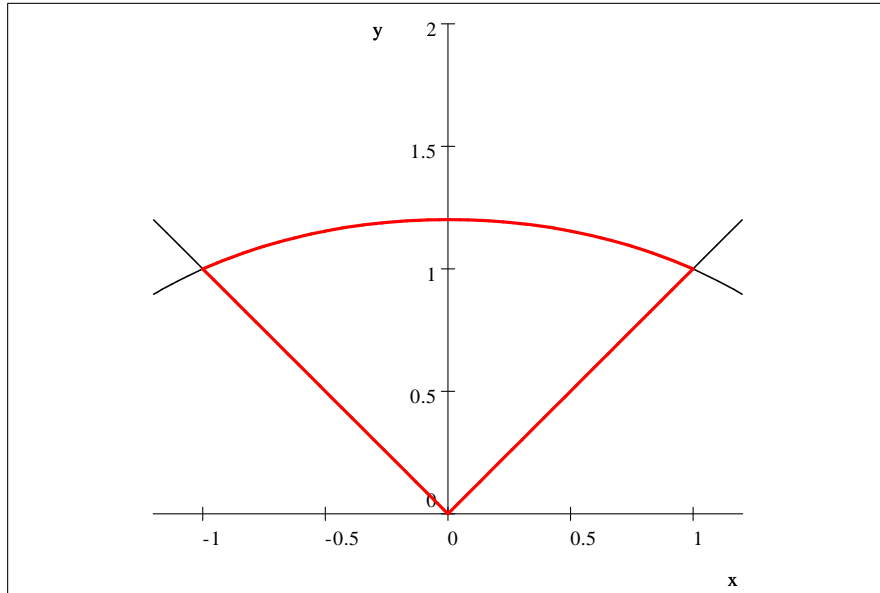
$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \right\}.$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned} \int \int_D (x-2y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} (x-2y) dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} (x-2y) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 [xy]_{\sqrt{1-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx - \int_0^1 [y^2]_{\sqrt{1-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx + \int_1^2 [xy]_0^{\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx - \int_1^2 [y^2]_0^{\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

6. Calcolare $\int \int_D y dx dy$ ove D è l'insieme in figura



Risoluzione L'insieme D è un dominio normale rispetto all'asse x poichè

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, |x| \leq y \leq \sqrt{\frac{13-4x^2}{9}} \right\}.$$

Quindi

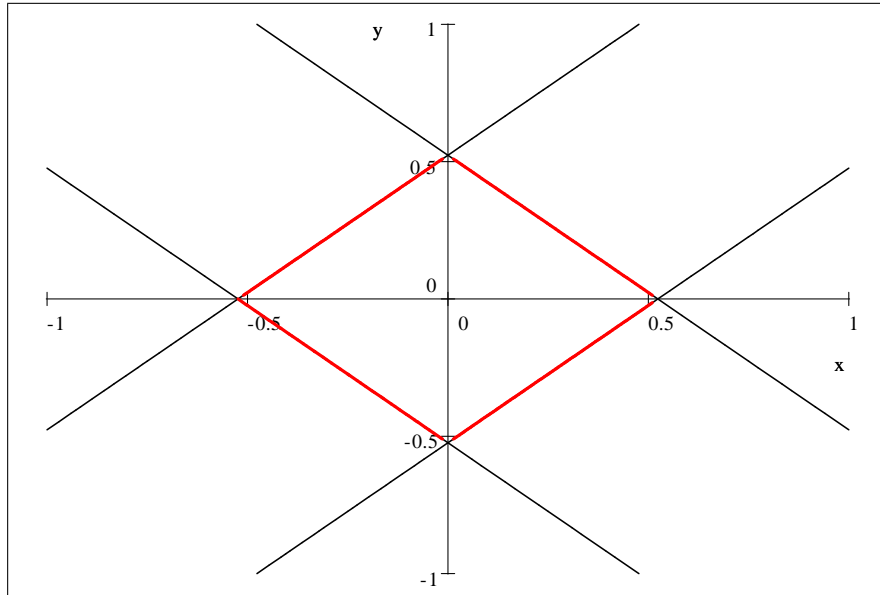
$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_{|x|}^{\sqrt{\frac{13-4x^2}{9}}} y dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{|x|}^{\sqrt{\frac{13-4x^2}{9}}} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{13-4x^2}{18} dx - \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{13}{18}x - \frac{2}{27}x^3 \right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-1}^1 = \frac{26}{27}. \end{aligned}$$

7. Calcolare $\int \int_D \frac{\tan^2(x+y)}{\tan(x+y)+1} dx dy$ ove D è la parte di piano racchiusa dalle rette $x+y = \frac{\pi}{6}$, $x-y = \frac{\pi}{6}$, $x+y = -\frac{\pi}{6}$, $x-y = -\frac{\pi}{6}$.

Risoluzione L'insieme D si può scrivere così

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{6} \leq x-y \leq \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \leq x+y \leq \frac{\pi}{6} \right\}.$$

e rappresentare come in figura



Faccio un cambio di variabili ponendo

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

in modo da ottenere la trasformazione $g(u, v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2})$ con $\det J_g = \frac{1}{2}$. Allora si può scrivere

$$D' = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{6} \leq u \leq \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \leq v \leq \frac{\pi}{6} \right\}$$

e si ha

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\tan^2(x+y)}{\tan(x+y)+1} dx dy &= \iint_{D'} \frac{\tan^2 v}{\tan v + 1} \frac{1}{2} du dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^2 v}{\tan v + 1} du \right) dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^2 v}{\tan v + 1} [u]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} dv = \\ &= \frac{\pi}{6} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^2 v}{\tan v + 1} dv. \end{aligned}$$

Pongo $t = \tan v$, così $v = \arctan t$ e $dv = \frac{1}{1+t^2} dt$. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^2 v}{\tan v + 1} dv &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^2}{t+1} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} \frac{1}{t+1} dt = \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{t+1} dt - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(t+1)(t^2+1)} dt. \end{aligned}$$

Poichè

$$\frac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{(A+B)t^2 + (B+C)t + A+C}{(t+1)(t^2+1)},$$

da cui

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \implies \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Quindi si ha che

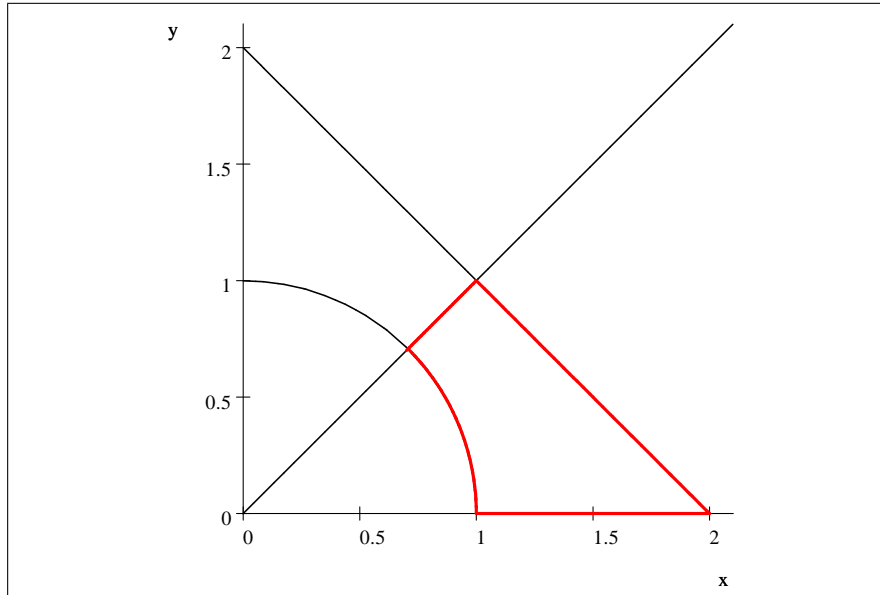
$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^2 v}{\tan v + 1} dv &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t+1}{t^2+1} dt = \\ &= \frac{1}{2} [\log |t+1|]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{1}{4} [\log(t^2+1)]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{2} [\arctan(t^2+1)]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\log \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \log \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\iint_D \frac{\tan^2(x+y)}{\tan(x+y)+1} dx dy = \frac{\pi}{12} \left(\log \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \log \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right).$$

8. Calcolare $\iint_D \frac{y}{x^2+y^2} dx dy$ ove D è la parte di piano delimitata dalle rette $y=x$, $y=2-x$, dall'asse x e dall'arco di circonferenza unitaria di centro l'origine.

Risoluzione L'insieme D è quello in figura



ovvero

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, x + y \leq 2, y \leq x, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

In coordinate polari

$$D' = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \mid \rho \geq 1, \rho(\cos \theta + \sin \theta) \leq 2, \rho \sin \theta \leq \rho \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

cioè

$$D' = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \mid \rho \geq 1, \rho \leq \frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

L'insieme D è normale rispetto a θ , ma non rispetto a ρ , pertanto si ha che

$$\int \int_D \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\frac{2}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 \frac{\rho \sin \theta}{\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \left(\frac{2}{\cos \theta + \sin \theta} - 1 \right) d\theta.$$

Calcoliamo il primo integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta \left(1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan \theta}{1 + \tan \theta} d\theta = \int_0^1 \frac{t}{1+t} \frac{1}{1+t^2} dt$$

ove ho posto $\tan \theta = t$ per ottenere l'ultima uguaglianza. Poichè

$$\frac{t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{(A+B)t^2 + (B+C)t + A+C}{(t+1)(t^2+1)},$$

da cui

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B + C = 1 \\ A + C = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

si ha che

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t}{1+t} \frac{1}{1+t^2} dt &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t+1}{t^2+1} dt = \\ &= -\frac{1}{2} [\log(t+1)]_0^1 + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} [\log(t^2+1)]_0^1 + \frac{1}{2} [\arctan t]_0^1 = \\ &= -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{2} \arctan 1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \frac{1}{2} \left(\arctan 1 - \frac{1}{2} \log 2 \right).$$

Pertanto

$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2} dx dy = \arctan 1 - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$