RISOLUZIONE TRACCIA B

1. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ con $X \subset \mathbb{R}$ si dice derivabile se per ogni $x_0 \in X$ punto di accumulazione per X esiste ed è finito il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La funzione f è sicuramente continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Essendo

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (ax^2 + bx) = a + b = f(1)$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (3x + 1) = 4$$

imponendo che la funzione f sia continua in 1, cioè che $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \in \mathbb{R}$, si ha che

$$a + b = 4. \tag{1}$$

La funzione f è sicuramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Essendo

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1} (2ax + b) = 2a + b$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 3$$

imponendo che la funzione f sia derivabile in 1, cioè che $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) \in \mathbb{R}$, si ha che

$$2a + b = 3. \tag{2}$$

Eguagliando (1) e (2) si ha che f è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ per $a = -1$ e $b = 5$.

2. Il limite presenta una forma indeterminata, infatti

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x \sin x}} = 1^\infty.$$

Ma

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x \sin x}} = \exp\left(\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x \sin x} \log\left(1 + x^2\right)\right)\right).$$

Posto $f(x) = \log\left(1+x^2\right)$ e $g(x) = x\sin x$, si ha che tali funzioni sono derivabili, entrambe tendono a zero per $x \to 0$, g e g' non si annullano. Inoltre si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{1+x^2}\,\frac{1}{x(\frac{\sin x}{x}+\cos x)}\right) = 1.$$

Pertanto, essendo verificate tutte le ipotesi del teorema di De L'Hopital, si ha che

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x\sin x}} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = e^1 = e.$$

3. **a)** L'insieme di definizione della funzione $f(x) = \log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ si ottiene ponendo $\frac{x-1}{x+1} > 0$, ovvero è $X_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ che è un insieme illimitato sia superiormente che inferiormente.

b) Essendo

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

si ha che $x=-1$ e $x=1$ sono asintoti verticali per f. Essendo

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

si ha che $y=0$ è asintoto orizzontale per f.

c) Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è limitata se

$$\exists k \in \mathbb{R}, k>0 \text{ tale che } \forall x \in X : |f(x)| \le k.$$

La funzione f non può essere limitata perchè ha asintoti verticali sia dall'alto che dal basso.

d) La funzione f non può avere massimi e minimi assoluti perchè non è limitata.

e) Per definizione

$$f^{-1}\left([0,1[\right) = \left\{x \in X_f \mid f(x) \in [0,1[\right\}.$$

Pertanto si deve risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \ge 0 \\ \log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 1 \end{cases}$$

cioè il sistema

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} \ge 1 \\ \frac{x-1}{x+1} < 2 \end{cases}$$

ottenendo che $f^{-1}([0,1[) =]-\infty,-3[$.

4. L'insieme di definizione della funzione f si ottiene ponendo $x-2>0$, cioè è $X_f =]2,+\infty[$. La funzione f è derivabile in tutto X_f e la sua derivata prima è
$$f'(x) = 2x-3-\frac{1}{x-2} = \frac{2x^2-7x+5}{x-2}.$$
Ponendo $f'(x)=0$ otteniamo i punti $x=1$ e $x=\frac{5}{2}$. Ma $1 \notin X_f$. Studiamo il segno della derivata prima:
$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \Leftrightarrow x \in]1,2[\cup \left]\frac{5}{2},+\infty\right[\\ f'(x) &> 0 \Leftrightarrow x \in \left]2,\frac{5}{2}\right[\end{aligned}$$
Ma $]1,2[$ non è contenuto in X_f, pertanto f è crescente in $\left]\frac{5}{2},+\infty\right[$ e decrescente in $\left]2,\frac{5}{2}\right[$. Inoltre $x=\frac{5}{2}$ è punto di massimo relativo per f. La funzione f è derivabile 2 volte in tutto X_f e la sua derivata seconda è
$$f''(x) = \frac{(4x-7)(x-2)-2x^2+7x-5}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x+9}{(x-2)^2}.$$
Si vede che f'' non si annulla mai, pertanto non ci sono flessi. Inoltre $f''(x)>0$ per ogni $x \in X_f$, pertanto f è sempre convessa.

5. Il teorema degli zeri afferma che:

   Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)\cdot f(b)<0$. Allora esiste $c\in]a,b[$ tale che $f(c)=0$.

   Consideriamo $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tale che per ogni $x\in[0,1]: f(x)=x^4+x^3-1$. Essendo f continua e tale che $f(0)=-1<0$ e $f(1)=1>0$, per il teorema degli zeri si ha che esiste una soluzione dell'equazione $x^4+x^3-1=0$ nell'intervallo $[0,1]$. Inoltre, essendo $f'(x)=4x^3+3x^2=x(4x^2+3x)$, si vede facilmente che $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$, cioè che f è strettamente crescente in $[0,1]$. Pertanto tale soluzione è anche unica.

6. Il criterio di Leibniz afferma che:

   Sia $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ una serie a segno alterno. Se $\lim_n a_n = 0$ e la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente, allora la serie converge.

   Nel nostro caso si ha che $\lim_n \log(\frac{1}{n}+1)=0$ e la successione $\left(\log(\frac{1}{n}+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente, in quanto si ha che
$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N}: \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n} \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: \frac{1}{n+1}+1<\frac{1}{n}+1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: \log\left(\frac{1}{n+1}+1\right)<\log\left(\frac{1}{n}+1\right). \end{aligned}$$

Pertanto, per il criterio di Leibniz, si ha che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log(\frac{1}{n}+1)$ converge.

Studiamo ora l'assoluta convergenza, ovvero studiamo il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \log(\frac{1}{n}+1)$. Poichè

$$\lim_n \frac{\log(\frac{1}{n}+1)}{\frac{1}{n}} = 1,$$

per il criterio del rapporto asintotico si ha che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \log(\frac{1}{n}+1)$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, ovvero diverge. Pertanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log(\frac{1}{n}+1)$ non converge assolutamente.

7. Poniamo $\omega = z + i$ ottenendo $\omega^2 = \left(\sqrt{3}+i\right)^3$.

   Poichè $\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, si ha che $\left(\sqrt{3}+i\right)^3 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Quindi

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2(1+i) \\ \omega_1 &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) = -2(1+i) \end{aligned}$$

   da cui si ha

$$\begin{aligned} z_0 &= 2(1+i) - i = 2 + i \\ z_1 &= -2(1+i) - i = -2 - 3i. \end{aligned}$$