

RISOLUZIONE TRACCIA A

1. Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X \subset \mathbb{R}$ si dice continua se

$$\forall x_0 \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in X, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

La funzione f è sicuramente continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + bx) = a + b = f(1)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 1) = 4$$

imponendo che la funzione f sia continua in 1, cioè che $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \in \mathbb{R}$, si ha che

$$a + b = 4. \quad (1)$$

La funzione f è sicuramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2ax + b) = 2a + b$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 3$$

imponendo che la funzione f sia derivabile in 1, cioè che $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \in \mathbb{R}$, si ha che

$$2a + b = 3. \quad (2)$$

Eguagliando (1) e (2) si ha che f è continua e derivabile in \mathbb{R} per $a = -1$ e $b = 5$.

2. Il limite presenta una forma indeterminata, infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan x - \arccos \frac{1}{x^2} \right) = 0 \cdot \infty.$$

Ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan x - \arccos \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \arccos \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}.$$

Posto $f(x) = \arctan x - \arccos \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, si ha che tali funzioni sono derivabili, entrambe tendono a zero per $x \rightarrow +\infty$, g e g' non si annullano. Inoltre si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{x^4} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2}{1+x^2} + \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}} \right) = -1. \end{aligned}$$

Pertanto, essendo verificate tutte le ipotesi del teorema di De L'Hopital, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan x - \arccos \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

3. a) L'insieme di definizione della funzione $f(x) = \log_2 \left(\frac{x-2}{x+2} \right)$ si ottiene ponendo $\frac{x-2}{x+2} > 0$, ovvero è $X_f =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ che è un insieme illimitato sia superiormente che inferiormente.

b) Essendo

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

si ha che $x = -2$ e $x = 2$ sono asintoti verticali per f . Essendo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

si ha che $y = 0$ è asintoto orizzontale per f .

c) Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata se

$$\exists k \in \mathbb{R}, k > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : |f(x)| \leq k.$$

La funzione f non può essere limitata perchè ha asintoti verticali sia dall'alto che dal basso.

d) La funzione f non può avere massimi e minimi assoluti perchè non è limitata.

e) Per definizione

$$f^{-1}([0, 1]) = \{x \in X_f \mid f(x) \in [0, 1]\}.$$

Pertanto si deve risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \log_2 \left(\frac{x-2}{x+2} \right) \geq 0 \\ \log_2 \left(\frac{x-2}{x+2} \right) < 1 \end{cases}$$

cioè il sistema

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x+2} \geq 1 \\ \frac{x-2}{x+2} < 2 \end{cases}$$

ottenendo che $f^{-1}([0, 1]) =]-\infty, -6[$.

4. L'insieme di definizione della funzione f si ottiene ponendo $e^{2x} - e^x > 0$, cioè $e^x(e^x - 1) > 0$, quindi $X_f =]0, +\infty[$. La funzione f è derivabile in tutto X_f e la sua derivata prima è

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x} = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}.$$

Ponendo $f'(x) = 0$ otteniamo il punto $x = \log \frac{1}{2} = -\log 2 < 0$ e che quindi non appartiene ad X_f . Pertanto non si hanno nè massimi nè minimi relativi. Inoltre, essendo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in X_f$, si ha che f è sempre strettamente crescente. La funzione f è derivabile 2 volte in tutto X_f e la sua derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) - e^x(2e^x - 1)}{(e^x - 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Si vede che f'' non si annulla mai, pertanto non ci sono flessi. Inoltre $f''(x) < 0$ per ogni $x \in X_f$, pertanto f è sempre concava.

5. Il teorema degli zeri afferma che:

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.

Consideriamo $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in [-1, 0] : f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 1$. Essendo f continua e tale che $f(-1) = 2 > 0$ e $f(0) = -1 < 0$, per il teorema degli zeri si ha che esiste una soluzione dell'equazione $x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 1 = 0$ nell'intervallo $[-1, 0]$. Inoltre, essendo $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x = 4x(x^2 + 3x + 12)$, si vede facilmente che $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$, cioè che f è strettamente decrescente in $[-1, 0]$. Pertanto tale soluzione è anche unica.

6. Il criterio di Leibniz afferma che:

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ una serie a segno alterno. Se $\lim a_n = 0$ e la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente, allora la serie converge.

Nel nostro caso si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2} - 1) = 0$ e la successione $(\sqrt[n]{2} - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente, in quanto si ha che

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : 2^{\frac{1}{n+1}} < 2^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : {}^{n+1}\sqrt{2} - 1 < \sqrt[n]{2} - 1.$$

Pertanto, per il criterio di Leibniz, si ha che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2} - 1)$ converge.

Studiamo ora l'assoluta convergenza, ovvero studiamo il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$. Poichè

$$\lim_n \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \log 2,$$

per il criterio del rapporto asintotico si ha che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$ ha

lo stesso carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, ovvero diverge. Pertanto la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2} - 1)$ non converge assolutamente.

7. Poniamo $\omega = z - i$ ottenendo $\omega^2 = (\sqrt{3} - i)^3$.

Poichè $\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$, si ha che

$$\left(\sqrt{3} - i\right)^3 = 8 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2(1 - i) \\ \omega_1 &= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right) \right) = 2(i - 1) \end{aligned}$$

da cui si ha

$$\begin{aligned} z_0 &= 2(1 - i) + i = 2 - i \\ z_1 &= 2(i - 1) + i = 3i - 2. \end{aligned}$$