Ricerca dei punti di massimo e di minimo per funzioni di due variabili

Sia $f : A \to R$ con $A \subset R^2$. I **punti di massimo e di minimo relativo** per f vanno ricercati tra:

1. i punti interni ad A stazionari per f che si ottengono risolvendo il sistema
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$
nelle incognite x e y. In seguito dovrò verificare se tali punti sono di massimo o di minimo relativo o di sella usando i criteri. Se $(x_0, y_0) \in A$ è una soluzione del sistema, avrò vari casi:
   a) Se $H(x_0, y_0) < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f;
   b) Se $H(x_0, y_0) = 0$, allora non posso usare i criteri e devo usare la definizione di massimo o di minimo relativo;
   c) Se $H(x_0, y_0) > 0$, allora il punto sarà o di massimo o di minimo relativo per f. In particolare, se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ (o equivalentemente se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0$) (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo per f; se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ (o equivalentemente $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo per f.
2. i punti interni in cui la funzione f *non è differenziabile*. Per tali punti dovremo usare la definizione per vedere se sono o no punti di massimo o di minimo relativo per f.
3. i punti sulla frontiera. La ricerca dei punti di massimo o di minimo relativo sulla frontiera può essere ricondotta allo studio dei punti di massimo o di minimo relativo vincolati per f.

Sia $f : A \to R$ con $A \subset R^2$. Per studiare i **punti di massimo e di minimo assoluto** per f bisogna procedere in questo modo:

1. si trovano i punti di massimo e di minimo relativo per f e in questi punti si calcola il valore della funzione. Se non esiste il più grande (rispettivamente il più piccolo) valore, diremo che non ci sono punti di massimo (rispettivamente di minimo) assoluto per f. Se invece esiste il più grande valore della funzione $M \in R$ (rispettivamente il più piccolo valore della funzione $m \in R$), allora esso potrebbe essere il massimo assoluto per la funzione (rispettivamente il minimo assoluto per la funzione) e i punti in cui esso viene assunto saranno punti di massimo assoluto per la funzione (rispettivamente punti di minimo assoluto per la funzione).
2. Si confrontano m ed M con il comportamento della funzione nei punti in cui essa è definita, ma non è continua, e nei punti di accumulazione in cui la funzione non è definita. Per studiare tale comportamento si calcola il limite della funzione per tali punti. Se in uno di questi punti il valore del limite è maggiore di M, allora non esiste il massimo assoluto per f, se invece in tutti i punti il limite è minore o uguale di M, allora esso sarà il massimo assoluto per f. Allo stesso modo, se in uno di questi punti il valore del limite è minore di m, allora non esiste il minimo assoluto per f, se invece in tutti i punti il limite è maggiore o uguale di m, allora esso sarà il minimo assoluto per f.