Esercizi sulle successioni e sulle serie numeriche

1. *Data la successione* $\left(\frac{2^n}{1+2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, *stabilire se essa è crescente e se è convergente.*

Risoluzione Per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}\frac{1+2^n}{2^n} = \frac{2\left(1+2^n\right)}{1+2^{n+1}} = \frac{2+2^{n+1}}{1+2^{n+1}} > 1,$$

cioè la successione $\left(\frac{2^n}{1+2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente. Ora calcolo

$$\lim_n \frac{2^n}{1+2^n} = \lim_n \frac{2^n+1-1}{1+2^n} = \lim_n \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1 - \lim_n \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$

Quindi la successione $\left(\frac{2^n}{1+2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente.

2. *Studiare la convergenza e la limitatezza della successione* $\left(1+\frac{n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Risoluzione Provo che

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{n}{2^n} \le \frac{2}{n}.$$

Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} \ge \\ &\ge \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = \\ &= 1 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \ge \frac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

Quindi, essendo $2^n \ge \frac{n^2}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, si ha che $0 < \frac{n}{2} \le \frac{2^n}{n}$, ovvero che

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < \frac{n}{2^n} \le \frac{2}{n}.$$

Pertanto, essendo $\lim_n \frac{2}{n} = 0$, per il teorema della convergenza obbligata, si ha che $\lim_n \frac{n}{2^n} = 0$ e quindi

$$\lim_n \left(1+\frac{n}{2^n}\right) = 1,$$

ovvero che la successione $\left(1+\frac{n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ è convergente e quindi limitata.

3. *Stabilire se la successione* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *è convergente.*

Risoluzione Poichè $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, si ha che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \geq 2^n \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}^*.$$

Essendo $\lim_n 2^n = +\infty$, per il teorema del confronto si ha che

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty.$$

4. *Studiare la convergenza della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Risoluzione Per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

essendo $|\sin n| \leq 1$ per ogni $n \geq 1$. Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il teorema del confronto si ha che anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ converge, ovvero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ converge assolutamente e quindi converge.

5. *Studiare la convergenza della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Risoluzione Poichè per ogni $n \geq 1$ si ha che $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è una serie telescopica. Pertanto, posto $a_n = \frac{1}{n}$ e $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ per ogni $n \geq 1$, si ha

$$\lim_n s_n = \lim_n (a_1 - a_{n+1}) = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Pertanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge ed ha per somma 1.

6. *Studiare la convergenza della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^4}{2^n}$.

Risoluzione Posto $a_n = \frac{(n+1)^4}{2^n}$ per ogni $n \geq 1$, si ha che

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{(n+2)^4}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(n+1)^4} = \frac{1}{2} < 1,$$

pertanto per il criterio del rapporto si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^4}{2^n}$ converge.

7. *Studiare la convergenza della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+2n-4}$.

Risoluzione Poichè per ogni $n \geq 3$ si ha

$$\frac{n+3}{n^3+2n-4} \leq \frac{n+n}{n^3+2n-4} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ convergente, per il criterio del confronto si ha che anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+2n-4}$ converge.

8. *Studiare la convergenza della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Risoluzione Posto $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ per ogni $n \geq 1$, si ha

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim_n \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1.$$

Pertanto, per il criterio della radice, si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

9. *Studiare la convergenza della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n}$.

Risoluzione Poichè per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\frac{2+\sin n}{n} \geq \frac{1}{n},$$

essendo $\sin n \geq -1$ per ogni $n \geq 1$, e poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente, allora per il criterio del confronto si ha che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n}$ diverge positivamente.

10. *Studiare la convergenza della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n(n+1)}$.

Risoluzione Posto $a_n = \frac{1}{2n(n+1)}$ per ogni $n \geq 1$, si ha che

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{1}{2n\,(n+1)} = 0.$$

Inoltre, essendo per ogni $n \geq 1$

$$2\,(n+1)\,(n+2) = 2n^2 + 2n + 4n + 4 < 2n^2 + 2n = 2n(n+1),$$

si ha che per ogni $n \geq 1$

$$\frac{1}{2n\,(n+1)} > \frac{1}{2\,(n+1)\,(n+2)},$$

cioè che la successione $\left(\frac{1}{2n(n+1)}\right)_{n\geq 1}$ è strettamente decrescente. Quindi, per il criterio di Leibniz, si ha che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n(n+1)}$ è convergente.