

Esercizi su successioni di funzioni e serie di funzioni

1. Data la successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, definite ponendo

$$\forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{se } x \notin [-n, n] \end{cases}$$

stabilire se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente ed uniformemente verso una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Risoluzione Fisso $x \in \mathbb{R}$. Poichè $\lim_n f_n(x) = 1$, allora $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente ad una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Fisso $n \in \mathbb{N}$. Poichè $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1$, si ha che $\lim_n \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$. Pertanto la convergenza non è uniforme.

2. Data la successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tali che $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, definite ponendo

$$\forall x \in [-1, 1] : f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}},$$

stabilire se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge puntualmente ed uniformemente verso una funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Risoluzione Fisso $x \in [-1, 1]$. Poichè $\lim_n f_n(x) = \lim_n \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = |x|$, allora

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge puntualmente ad una funzione $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = |x|$ per ogni $x \in [-1, 1]$. Fisso $n \in \mathbb{N}^*$ e calcolo $\sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)|$.

Fisso $x \in [-1, 1]$, si ha che

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \frac{\left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x| \right|}{\left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x| \right|} \\ &= \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Allora $\sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e pertanto $\lim_n \sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$, cioè la convergenza è anche uniforme.

3. Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$, $x \geq 0$.

Risoluzione Fisso $x \geq 0$. Per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$\frac{nx^2}{n^3 + x^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, per il criterio di Weierstrass si ha che

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}$ converge uniformemente.

4. *Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{nx}{1+n^4x}}$, $x \geq 0$.*

Risoluzione Fisso $x \geq 0$. Per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$\sqrt{\frac{nx}{1+n^4x}} \leq \sqrt{\frac{nx}{n^4x}} = \sqrt{\frac{1}{n^3}}.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^3}}$ è convergente, per il criterio di Weierstrass si ha

che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{nx}{1+n^4x}}$ converge uniformemente.

5. *Studiare la convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$.*

Risoluzione Posto $a_n = 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per il criterio di D'Alembert, essendo

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \lim_n \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2,$$

si ha che $R = \frac{1}{2}$, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ e totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k, k] \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Se $x = -\frac{1}{2}$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ che non converge. Se $x = \frac{1}{2}$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ che non converge. Quindi l'insieme di convergenza è $A =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

6. *Studiare la convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} e^{-n}$.*

Risoluzione Pongo $x^2 = y$ e considero la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} y^n e^{-n}$. Posto $a_n = e^{-n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per il criterio di Cauchy-Hadamard, essendo

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{e^{-n}} = \frac{1}{e},$$

si ha che $R = e$, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} y^n e^{-n}$ converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $] -e, e[$ e totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k, k] \subset [-e, e]$. Se $y = -e$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ che non converge. Se $y = e$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ che non converge.

Quindi l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} y^n e^{-n}$ è $] -e, e[$. Quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} e^{-n}$ converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $] -\sqrt{e}, \sqrt{e}[$ e totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k, k] \subset [-\sqrt{e}, \sqrt{e}]$ e il suo insieme di convergenza è $] -\sqrt{e}, \sqrt{e}[$.

7. Studiare la convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

Risoluzione Pongo $x + 3 = y$ e considero la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$. Posto $a_n = \frac{1}{n^2}$ per ogni $n \geq 1$, per il criterio di D'Alembert, essendo

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \lim_n \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 1,$$

si ha che $R = 1$, quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$ converge assolutamente (e quindi puntualmente) in $] -1, 1[$ e totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo del tipo $[-k, k] \subset [-1, 1]$. Se $y = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ che converge. Se $y = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge. Quindi

l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$ è $[-1, 1]$. Pertanto l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$ è $[-4, -2]$.