Esercizi sui numeri complessi

1. *Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso*

$$z = \frac{1-2i}{1+3i}.$$

Risoluzione Scriviamo prima z in forma algebrica, cioè

$$z = \frac{1-2i}{1+3i}\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{-5-5i}{10} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Poi calcoliamo

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \theta &= -\arccos\left(-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

Pertanto in forma trigonometrica si scrive

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right).$$

2. *Risolvere in campo complesso l'equazione*

$$z^2 + z\bar{z} - 4 + 2i = 0.$$

Risoluzione Cerco soluzioni del tipo $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Per essere soluzione deve essere

$$(a+ib)^2 + (a+ib)(a-ib) - 4 + 2i = 0,$$

ovvero

$$2a^2 - 4 + i(2ab+2) = 0.$$

Impongo che parte reale e parte immaginaria sia uguali a zero, cioè

$$\begin{cases} 2a^2 - 4 = 0 \\ 2ab + 2 = 0 \end{cases}$$

e ottengo due coppie di soluzioni

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} a_2 = -\sqrt{2} \\ b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

ovvero due soluzioni dell'equazione: $z_1 = \sqrt{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z_2 = -\sqrt{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. *Risolvere in campo complesso l'equazione*

$$(3z-i)^2 = 1.$$

Risoluzione Pongo $w = 3z - i$ e risolvo l'equazione $w^2 = 1$. Scrivo in forma trigometrica 1:

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0).$$

Ora calcolo le radici quadrate di 1:

$$\begin{aligned} w_1 &= 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1, \\ w_2 &= 1(\cos \pi + i \sin \pi) = -1. \end{aligned}$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{w_1 + i}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i, \\ z_2 &= \frac{w_2 + i}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i. \end{aligned}$$

4. *Risolvere in campo complesso l'equazione*

$$z^6 = (1-i)^3.$$

Risoluzione In forma trigonometrica

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Per la formula di De Moivre si ha:

$$(1-i)^3 = \sqrt{8}\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right).$$

Pertanto le radici seste di $(1-i)^3$ sono:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[12]{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right), \\ z_1 &= \sqrt[12]{8}\left(\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{8}\pi\right)\right), \\ z_2 &= \sqrt[12]{8}\left(\cos\left(\frac{13}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{13}{8}\pi\right)\right), \\ z_3 &= \sqrt[12]{8}\left(\cos\left(\frac{21}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{21}{8}\pi\right)\right), \\ z_4 &= \sqrt[12]{8}\left(\cos\left(\frac{29}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{29}{8}\pi\right)\right), \\ z_5 &= \sqrt[12]{8}\left(\cos\left(\frac{37}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{37}{8}\pi\right)\right). \end{aligned}$$

5. *Risolvere in campo complesso l'equazione*

$$\left(z^3 - i\right)\left(z^2 + 2z - i\right) = 0.$$

Risoluzione Risolvo $z^3 - i = 0$, cioè trovo le radici terze di i. In forma trigonometrica posso scrivere $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Quindi

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\
z_1 &= 1\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\
z_2 &= 1\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -i.
\end{aligned}$$

Ora risolvo $z^2 + 2z - i = 0$. Le soluzioni di questa equazione di secondo grado sono: $z_{3,4} = -1 + \sqrt{1+i}$. Devo quindi calcolare le radici quadrate di $w = 1 + i$. In forma trigonometrica $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, quindi le radici quadrate di w sono

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right), \\
w_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi\right).
\end{aligned}$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono

$$\begin{aligned}
z_3 &= -1 + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right), \\
z_4 &= -1 + \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{8}\pi + i\sin\frac{3}{8}\pi\right).
\end{aligned}$$

Quindi z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 sono le 5 soluzioni dell'equazione

$$\left(z^3 - i\right)\left(z^2 + 2z - i\right) = 0.$$