Esercizi sugli insiemi e sulle funzioni

1. *Stabilire se il seguente sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *è limitato superiormente e inferiormente*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,|x = n \text{ oppure } x = \frac{1}{n^2},\, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Risoluzione L'insieme A non è limitato superiormente, quindi $\sup A = +\infty$ e non ha massimo. Gli elementi di A sono tutti positivi, quindi A è limitato inferiormente. Proviamo che $\inf A = 0$. Se per assurdo non fosse vero, avrei che se $r > 0$ fosse un minorante di A, si avrebbe che

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n^2} > r,$$

cioè $n^2 < \frac{1}{r}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, ovvero otterrei che

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : n < \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Ma questo è assurdo perchè l'insieme $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente, quindi $\inf A = 0$. Ma $0 \notin A$, quindi tale insieme non ha minimo.

2. *Stabilire se il seguente sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *è limitato superiormente e inferiormente*

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \right\}.$$

Risoluzione Poichè $E \subset \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, allora E è limitato. Inoltre $\sup E = \sqrt{2}$ e $\inf E = -\sqrt{2}$, ma tale insieme non ha nè massimo nè minimo poichè $-\sqrt{2} \notin E$ e $\sqrt{2} \notin E$.

3. *Determinare l'immagine delle seguenti funzioni e dire se sono limitate:*

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1},\; g(x) = \sqrt{x+2} - 1,\; h(x) = e^{5x+3}.$$

Risoluzione La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$. Poichè $x^2 + 1 \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè $\operatorname{Im} f =]0, 1]$. L'insieme di definizione di g è $X_g = [-2, +\infty[$. Poichè $\sqrt{x+2} \geq 0$ per ogni $x \in X_g$, si ha che $\operatorname{Im} g = [1, +\infty[$. La funzione h è definita su tutto $\mathbb{R}$ e poichè $e^{5x+3} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $\operatorname{Im} h =]0, +\infty[$. Quindi la funzione f è limitata e le funzioni g ed h sono limitate dal basso, ma non dall'alto.

4. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che* $f(x) = -\log(x-1)$. *Determinare l'insieme di definizione di* f, $f^{-1}([0, +\infty[)$ *e* $f^{-1}(]-\infty, -1])$.

Risoluzione L'insieme di definizione di f è $X_f =]1, +\infty[$. Inoltre

$$\begin{aligned}
f^{-1}\left([0,+\infty[\right) &= \{x \in X_f \mid f(x) \in [0,+\infty[\} = \\
&= \{x \in]1,+\infty[\mid -\log(x-1) \geq 0\} =]1,2]\,, \\
f^{-1}\left(]-\infty,-1]\right) &= \{x \in X_f \mid f(x) \in]-\infty,-1]\} = \\
&= \{x \in]1,+\infty[\mid -\log(x-1) \leq -1\} = [e+1,+\infty[\,.
\end{aligned}$$

5. *Siano* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *così definite:*

$$\begin{aligned}
\forall x &\in \mathbb{R} : f(x) = x^2 - 3 \\
\forall x &\in]-1,+\infty[: g(x) = \log(1+x).
\end{aligned}$$

Determinare $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *e i loro insiemi di definizione.*

Risoluzione Poichè

$$\begin{aligned}
x &\in X_{g\circ f} \Leftrightarrow x \in X_f \text{ e } f(x) \in X_g \\
x &\in X_{f\circ g} \Leftrightarrow x \in X_g \text{ e } g(x) \in X_f
\end{aligned}$$

allora si ha che $X_{g\circ f} = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$ e $X_{f\circ g} =]-1, +\infty[$. Inoltre, per ogni $x \in X_{g\circ f}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2 - 3\right) = \log\left(x^2 - 2\right)$$

e per ogni $x \in X_{f\circ g}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log(x+1)) = (\log(x+1))^2 - 3.$$