SUPERFICI DI ROTAZIONE

Esercizio 1. *Determinare l'equazione del cono* Γ *di vertice* V *e avente la curva* γ *come direttrice, ove*

$$V\,(0,3,0)\ \ e\ \gamma : \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 3z^2 - 2x + z = 0 \end{cases} .$$

Risoluzione:

Prendo un punto P generico sulla curva γ, cioè $P\,(h,0,k)$ con h e k tali che

$$h^2 + 3k^2 - 2h + k = 0. \qquad (*)$$

Considero la generica generatrice g del cono che è la retta congiungente V e P

$$g : \frac{x}{h} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{k}.$$

Uguagliando prima e seconda ottengo

$$h = -\frac{3x}{y-3}.$$

Uguagliando seconda e terza ottengo

$$k = -\frac{3z}{y-3}.$$

Sostituendo questi valori di h e k nell'equazione $(*)$ otteniamo l'equazione del cono

$$\Gamma : 9x^2 + 27z^2 + 6xy - 3yz - 18x + 9z = 0.$$

Esercizio 2. *Determinare il cilindro avente come direttrice la curva γ e generatrici perpendicolari a π, ove*

$$\pi : x - z + 1 = 0 \text{ e } \gamma : \begin{cases} x - y = 0 \\ 3y^2 - z^2 = 1 \end{cases}.$$

Risoluzione:

Prendo un punto P generico sulla curva γ, cioè $P\,(h, h, k)$ con h e k tali che

$$3h^2 - k^2 = 1. \qquad (*)$$

Considero la generica generatrice g del cilindro che sarà la retta passante per P e avente come vettore direttore $\overrightarrow{v_\pi}\,(1, 0, -1)$

$$g : \frac{x-h}{1} = \frac{y-h}{0} = \frac{z-k}{-1}.$$

Da cui ottengo

$$h = y$$

e uguagliando prima e terza

$$k = x - y + z.$$

Sostituendo questi valori di h e k nell'equazione $(*)$ otteniamo l'equazione del cilindro

$$\Gamma : 3y^2 - (x - y + z)^2 = 1.$$

Esercizio 3. *Determinare il cilindro circolare retto Γ avente per asse la retta a e raggio 1, ove*

$$a : \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}.$$

Risoluzione:

Cerco una curva direttrice (che sarà una circonferenza con centro sulla retta a) e la generica generatrice.

Prendo un punto che appartiene ad a, per esempio $O\,(0,0,0)$. Ora considero il piano π ortogonale ad a e passante per O

$$\pi : \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{v_a} = 0.$$

Essendo $\overrightarrow{v_a}\,(1,0,1)$, si ha

$$\pi : (x,y,z) \cdot (1,0,1) = 0$$

e quindi

$$\pi : x + z = 0.$$

Questo sarà il piano della circonferenza γ che ha centro nel punto O.

Come sfera che la contiene prendo quella che ha stesso centro e stesso raggio che è per ipotesi 1

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Quindi la circonferenza γ che è una direttrice del cilindro sarà

$$\gamma = S \cap \pi : \left\{ \begin{array}{c} x + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right. .$$

Prendo ora un punto generico P sulla direttrice γ, cioè il punto $P\,(h,k,-h)$ con h e k tali che

$$2h^2 + k^2 = 1. \qquad (*)$$

Considero la generica generatrice g del cilindro che sarà la retta passante per P e parallela all'asse a

$$g : \frac{x-h}{1} = \frac{y-k}{0} = \frac{z+h}{1}$$

essendo $\overrightarrow{v_a}\,(1,0,1)$.
Da cui ottengo

$$k = y$$

e uguagliando prima e terza

$$h = \frac{x-z}{2}.$$

Sostituendo questi valori di h e k nell'equazione $(*)$ otteniamo l'equazione del cilindro

$$\Gamma : (x-z)^2 + 2y^2 = 2.$$

Esercizio 4. *Determinare il cono circolare retto* Γ *avente per asse la retta* t *e per generatrice la retta* s*, ove*

$$t : \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y+1 \end{cases} \quad e \;\; s : \begin{cases} x+y+1 = 0 \\ z+1 = 0 \end{cases} .$$

Risoluzione:

Il vertice V del cono sarà il punto di intersezione tra l'asse e la generatrice

$$\{V\} = s \cap t : \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y+1 \\ x+y+1 = 0 \\ z+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow V\,(0,-1,-1)\,.$$

Cerco una curva direttrice (che sarà una circonferenza con centro sull'asse t).

Prendo un punto P qualsiasi sull'asse t, per esempio il punto $P\,(0,0,1)$.

Considero il piano π ortogonale a t e passante per P

$$\pi : \overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{v_t} = 0.$$

Essendo $\overrightarrow{v_t}\,(0,1,2)$, si ha

$$\pi : (x, y, z-1) \cdot (0,1,2) = 0$$

e quindi

$$\pi : y + 2z - 2 = 0.$$

Questo sarà il piano della circonferenza γ che ha centro nel punto P.
Per trovare il raggio devo intersecare l'asse con la generatrice s

$$\{Q\} = \pi \cap s : \left\{ \begin{array}{c} y + 2z - 2 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow Q\,(-5, 4, -1)\,.$$

Allora il raggio della circonferenza γ sarà $d\,(P, Q)$, cioè

$$R^2 = d\,(P, Q)^2 = 45.$$

Come sfera che la contiene prendo quella che ha stesso centro e stesso raggio, cioè

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 44 = 0.$$

Quindi la circonferenza γ che è una direttrice del cono sarà

$$\gamma = S \cap \pi : \left\{ \begin{array}{c} y + 2z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 44 = 0 \end{array} \right. .$$

Prendo ora un punto generico R sulla direttrice γ, cioè il punto $R\,(h, 2-2k, K)$ con h e k tali che

$$h^2 + (2-2k)^2 + k^2 - 2k - 44 = 0. \qquad (*)$$

Considero la generica generatrice g del cono che sarà la retta passante per V e R

$$g : \frac{x}{h} = \frac{y+1}{3-2k} = \frac{z+1}{k+1}.$$

Uguagliando prima e seconda ottengo

$$h = \frac{(3-2k)\,x}{y+1}.$$

Uguagliando prima e terza ottengo

$$k = \frac{(3-2k)\,z - y + 2 - 2k}{y+1}.$$

Sostituendo questi valori di h e k nell'equazione $(*)$ otteniamo l'equazione del cono.

Esercizio 5. *Determinare la superficie di rotazione di asse r e generatrice s, ove*

$$r : \begin{cases} 2x = z \\ 2y = z \end{cases} \quad e \ s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Risoluzione:

Poichè r non è parallela ad s, la superficie di rotazione è un cono il cui vertice sarà il loro punto di intersezione, cioè

$$\{V\} = r \cap s : \begin{cases} 2x = z \\ 2y = z \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow V\,(1,1,2)\,.$$

Prendo un punto P generico sulla generatrice s, cioè $P\,(1,1,h)$.

Cerco una direttrice del cono che sarà una circonferenza.
Calcolo ora il piano π passante per P e ortogonale all'asse r

$$\pi : \overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0.$$

Essendo $\overrightarrow{v_r}\,(1,1,2)$ si ha

$$\pi : (x-1, y-1, z-h) \cdot (1,1,2) = 0$$

e quindi

$$\pi : x + y + 2z - 2h - 2 = 0.$$

Questo sarà il piano della circonferenza γ avente centro sull'asse r.
Ora prendo un punto qualsiasi sull'asse r, per esempio il punto $O\,(0,0,0)$.
Prendo come sfera che la contiene quella avente centro in O e raggio $R = d\,(O,P) = h^2 + 2$, cioè

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = h^2 + 2.$$

Quindi la circonferenza γ che è una direttrice del cono sarà

$$\gamma = S \cap \pi : \left\{ \begin{array}{c} x + y + 2z - 2h - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = h^2 + 2 \end{array} \right. .$$

Dalla prima equazione ricavo

$$h = \frac{x + y + 2z - 2}{2}$$

e lo sostitiuisco nella seconda equazione ottenendo così l'equazione del cono

$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 2 + \frac{(x + y + 2z - 2)^2}{4}.$$

Esercizio 6. *Determinare la superficie di rotazione di asse r e generatrice s, ove*

$$r : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad e \ s : \begin{cases} 2x - 4y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Risoluzione:

Poichè r è parallela ad s, la superficie di rotazione è un cilindro.
Prendo un punto P generico sulla generatrice s, cioè $P\left(2h + \frac{1}{2}, h, 0\right)$.
Cerco una direttrice del cilindro che sarà una circonferenza.
Calcolo ora il piano π passante per P e ortogonale all'asse r

$$\pi : \overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0.$$

Essendo $\overrightarrow{v_r}\,(2, 1, 0)$ si ha

$$\pi : \left(x - 2h - \frac{1}{2}, y - h, z\right) \cdot (2, 1, 0) = 0$$

e quindi

$$\pi : 2x + y - 5h - 1 = 0.$$

Questo sarà il piano della circonferenza γ avente centro sull'asse r.
Ora prendo un punto qualsiasi sull'asse r, per esempio il punto $A\,(0, 0, 1)$.
Prendo come sfera che la contiene quella avente centro in A e raggio
$R = d\,(A, P) = \left(2h + \frac{1}{2}\right)^2 + h^2 + 1$, cioè

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2z = \left(2h + \frac{1}{2}\right)^2 + h^2.$$

Quindi la circonferenza γ che è una direttrice del cilindro sarà

$$\gamma = S \cap \pi : \begin{cases} 2x + y - 5h - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2z = \left(2h + \frac{1}{2}\right)^2 + h^2 \end{cases} .$$

Dalla prima equazione ricavo

$$h = \frac{2x + y - 1}{5}$$

e lo sostitiuisco nella seconda equazione ottenendo così l'equazione del cilindro

$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 2z = \left(\frac{4x + 2y - 2}{5} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{(2x + y - 1)^2}{25}.$$