

## Esercizi di Geometria Analitica

**Esercizio 1.** Siano

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \\ z = t \end{cases}, \quad \pi : x - y = 0, \quad P(0, 0, 2).$$

- Trovare la retta  $r'$  simmetrica di  $r$  rispetto a  $\pi$  e il loro piano.
- Trovare la circonferenza  $\mathcal{C}$  del piano  $\pi$ , avente centro sulla retta  $r$  e passante per il punto  $P$ .
- Trovare la tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P$ .

**Risoluzione:**

a) Il vettore direttore della retta  $r$  è  $\vec{v}_r(1, -1, 1)$ .

Per prima cosa studiamo la posizione reciproca tra la retta  $r$  e il piano  $\pi$ .

Consideriamo il vettore ortogonale al piano  $\pi$ , cioè  $\vec{v}_\pi(1, -1, 0)$ .

Poichè

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (1, -1, 1) \cdot (1, -1, 0) \neq 0,$$

allora  $r$  e  $\pi$  non sono paralleli tra di loro. Quindi saranno incidenti.

Calcolo

$$\{A\} = r \cap \pi : \begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \\ z = t \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1, 1, 1).$$

Prendo un punto  $Q \in r$  a scelta, per esempio  $Q(0, 2, 0)$ .

Ora calcolo la retta  $n \perp \pi$  e passante per  $Q$

$$n : \overrightarrow{QX} = t\vec{v}_\pi,$$

quindi

$$n : (x, y - 2, z) = t(1, -1, 0),$$

cioè

$$n : \begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Ora calcolo

$$\{H\} = n \cap \pi : \begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \\ z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow H(1, 1, 0).$$

Allora  $Q'(x, y, z)$  sarà il simmetrico di  $Q$  rispetto a  $\pi$  se e solo se  $H$  è punto medio tra  $Q$  e  $Q'$ . Quindi

$$\begin{cases} 1 = \frac{x+0}{2} \\ 1 = \frac{y+2}{2} \\ 0 = \frac{z+0}{2} \end{cases} \Rightarrow Q'(2, 0, 0).$$

Pertanto la retta  $r'$  è la retta passante per  $A$  e  $Q'$ , cioè

$$r' : \frac{x-2}{1-2} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-0}{1-0} \Rightarrow r' : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Il piano  $\alpha$  contenente le rette  $r$  e  $r'$  si può trovare in due modi.

Primo modo: Essendo  $r$  e  $r'$  incidenti nel punto  $A$ , esse non sono parallele, quindi i loro vettori direttori  $\vec{v}_r$  e  $\vec{v}_{r'}$  sono i vettori di giacitura del piano  $\alpha$  cercato.

Quindi

$$\alpha : \overrightarrow{AX} = t\vec{v}_r + t'\vec{v}_{r'},$$

cioè

$$\alpha : (x-1, y-1, z-1) = t(1, -1, 1) + t'(1, -1, -1),$$

ovvero

$$\alpha : \begin{cases} x = t + t' + 1 \\ y = t - t' + 1 \\ z = t - t' + 1 \end{cases}.$$

Secondo modo: Questo vale anche se le due rette fossero state parallele tra di loro. Considero il fascio  $\mathfrak{F}$  di asse la retta  $r$  e poi trovo il piano  $\alpha$  imponendo che un punto di  $r'$ , per esempio  $Q'$ , vi appartenga. Allora, poichè

$$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases},$$

si ha

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(r) : x + y - 2 + \lambda(x - z) = 0.$$

Imponendo che  $Q' \in \mathfrak{F}$ , si ottiene

$$\lambda = 0$$

e pertanto

$$\alpha : x + y - 2 = 0.$$

b) Il centro della circonferenza ovviamente deve giacere sul suo piano, quindi

$$\{C\} = r \cap \pi \Rightarrow C \equiv A(1, 1, 1).$$

Prendo come sfera  $S$  che contiene  $C$  quella che la contiene come circonferenza massima, cioè avente stesso centro e stesso raggio  $R = d(C, P)$ .

Calcolo

$$R^2 = d(C, P)^2 = 3.$$

Allora

$$S : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3,$$

cioè

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0.$$

Pertanto

$$C = S \cap \pi : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

c) Calcolo la retta  $s$  congiungente  $C$  e  $P$

$$s : \frac{x - 1}{0 - 1} = \frac{y - 1}{0 - 1} = \frac{z - 1}{2 - 1} \Rightarrow s : \begin{cases} x = y \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Il suo vettore direttore è  $\vec{v}_s(1, 1, -1)$ .

La retta  $t$  tangente a  $C$  in  $P$  sarà individuata da due piani: uno è ovviamente il piano  $\pi$  della circonferenza e l'altro è il piano  $\beta$  ortogonale alla retta  $s$  e passante per  $P$ .

Il piano  $\beta$  è dato da

$$\beta : \overrightarrow{PX} \cdot \vec{v}_s = 0,$$

cioè

$$\beta : (x, y, z - 2) \cdot (1, 1, -1) = 0,$$

ovvero

$$\beta : x + y - z + 2 = 0.$$

Pertanto la retta  $t$  cercata è

$$t = \beta \cap \pi : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} .$$

**Esercizio 2.** *Trovare la retta  $r'$  proiezione della retta  $r$  sul piano  $\pi$  dove*

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad e \quad \pi : 2x - y + 1 = 0.$$

**Risoluzione:**

Il vettore direttore della retta  $r$  è  $\vec{v}_r(-1, 2, 1)$ .

La retta  $r'$  è intersezione di due piani: uno è ovviamente il piano  $\pi$  (perchè giacere su di esso) e l'altro è il piano  $\pi'$  contenente la retta  $r$  e ortogonale a  $\pi$ .

La retta  $r$  si può anche scrivere

$$r. \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} .$$

Scrivo il fascio  $\mathfrak{F}$  di asse la retta  $r$

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(r) : 2x + y - 2 + \lambda(x + z - 2) = 0,$$

cioè

$$\mathfrak{F} : (2 + \lambda)x + y + \lambda z - 2 - 2\lambda = 0.$$

Considero il vettore  $\vec{v}_\pi$  ortogonale al piano  $\pi$ , cioè  $\vec{v}_\pi(2, -1, 0)$ . Il vettore ortogonale a  $\mathfrak{F}$  è  $\vec{v}_\mathfrak{F}(2 + \lambda, 1, \lambda)$ .

Poichè

$$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_\mathfrak{F} = 0,$$

si ha che

$$(2, -1, 0) \cdot (2 + \lambda, 1, \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}.$$

Quindi

$$\pi' : x + 2y - 3z + 2 = 0.$$

Pertanto

$$r' = \pi \cap \pi' : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 3z + 2 = 0 \end{cases}.$$

**Esercizio 3.** Stabilire se le rette  $r$  ed  $s$  sono sghembe e in tal caso determinare la retta di minima distanza tra  $r$  ed  $s$  ove

$$r : \begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad e \quad s : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases}.$$

**Risoluzione:**

Considero la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poichè  $\det A \neq 0$  allora le rette sono sghembe.

Scriviamo così le 2 rette

$$r : \begin{cases} z = 2x - y - 1 \\ y = 2z - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} z = 2x + y \\ y = 2 - 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

La retta  $d$  di minima distanza tra due rette è una retta incidente ed ortogonale ad entrambe. Prendiamo un punto generico  $R$  su  $r$  e un punto generico  $S$  su  $s$ . Sia  $R(t, \frac{4}{3}t - \frac{2}{3}, \frac{2}{3}t - \frac{1}{3})$  ed  $S(t', -\frac{3}{2}t' + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}t' + \frac{1}{2})$ .

Allora  $\overrightarrow{RS}(t - t', \frac{4}{3}t + \frac{3}{2}t' - \frac{7}{6}, \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}t' - \frac{5}{6})$ .

Poichè  $d$  deve essere incidente  $r$  ed  $s$  deve passare per  $R$  ed  $S$ .

Ora impongo che  $d$  sia ortogonale ad entrambe, cioè che

$$\overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_r = 0 \quad e \quad \overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_s = 0,$$

essendo  $\overrightarrow{RS}$  il vettore direttore di  $d$ . Ma  $\vec{v}_r(1, 1, 1)$  e  $\vec{v}_s(1, -3, 2)$ .

Quindi

$$\begin{cases} (t - t', \frac{4}{3}t + \frac{3}{2}t' - \frac{7}{6}, \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}t' - \frac{5}{6}) \cdot (1, 1, 1) = 0 \\ (t - t', \frac{4}{3}t + \frac{3}{2}t' - \frac{7}{6}, \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}t' - \frac{5}{6}) \cdot (1, -3, 2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t - t' + \frac{4}{3}t + \frac{3}{2}t' - \frac{7}{6} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}t' - \frac{5}{6} = 0 \\ t - t' - 4t - \frac{9}{2}t' + \frac{7}{2} + \frac{4}{3}t - t' - \frac{5}{3} = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t' = \frac{1}{9} \end{cases} .$$

Pertanto

$$R \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9} \right) \text{ e } \overrightarrow{RS} \left( \frac{5}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{4}{9} \right).$$

La retta di minima distanza è la retta congiungente  $R$  ed  $S$ , cioè la retta

$$d : \begin{cases} 4y - z - \frac{7}{9} = 0 \\ x + 5y - \frac{16}{9} = 0 \end{cases} ,$$

mentre la minima distanza tra  $r$  ed  $s$  è  $d(R, S)$ .