Esercizi sugli endomorfismi

Esercizio 1

E' assegnato l'endomorfismo f dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ nel modo seguente

$$f(e_1) = (-3, -7, -6), \; f(e_2) = (1, 5, 6), \; f(e_3) = (-1, -1, -2)$$

essendo e_1, e_2, e_3 i vettori della base canonica.

a) Si stabilisca se f è automorfismo, si verifichi che $\lambda = -2$ è un autovalore di f e si stabilisca se l'endomorfismo è diagonalizzabile.

b) Detto S il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (h, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 1-h)$, $v_3 = (1+h, 1, -1)$ con h parametro reale, si discuta $\dim S$ e si stabilisca quando $f(S)$ è uguale a $\mathbb{R}^3$.

c) Verificato che per $h = 0$ i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$, si determini la matrice A' associata a f nella base $\mathcal{B}'$.

d) Considerato $\mathbb{R}^3$ spazio euclideo e detto E_{-2} l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = -2$, si determini il suo complemento ortogonale $E_{-2}^{\perp}$ in $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione:

a) Considero la matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ricordo che

$$\operatorname{Im} f = L(f(e_1), f(e_2), f(e_3)).$$

Per essere un automorfismo mi basta che f sia surgettivo e quindi devo solo verificare che $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e cioè che $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ siano linearmente indipendenti.
E questo equivale a dire che $rang A = 3$.
Calcolo

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

Pertanto f è un automorfismo.
Poichè

$$\lambda \text{ è autovalore per } f \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0,$$

devo verificare che $\det(A + 2I) = 0$.
Calcolo

$$\det(A + 2I) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi $\lambda = -2$ è autovalore per f.
L'endomorfismo f è diagonalizzabile se e solo se lo è la matrice A.
Calcolo i suoi autovalori:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 16 + 12\lambda - \lambda^3.$$

Allora

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 4 \vee \lambda_2 = -2.$$

Pertanto ho due autovalori $\lambda_1 = 4$ con $m_a(\lambda_1) = 1$ e $\lambda_2 = -2$ con $m_a(\lambda_2) = 2$.
Per stabilire se A è diagonalizzabile devo verificare se $m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1)$ e $m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2)$.
Calcolo

$$\begin{aligned} m_g(\lambda_1) &= 3 - rang(A - \lambda_1 I) = 3 - 2 = 1 \\ m_g(\lambda_2) &= 3 - rang(A - \lambda_2 I) = 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

Quindi, essendo $m_a(\lambda_2) \neq m_g(\lambda_2)$, ho che f non è diagonalizzabile.

b) Considero la matrice

$$C = \begin{pmatrix} h & -1 & 1+h \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-h & -1 \end{pmatrix}.$$

Poichè esiste il minore $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, allora il rango di C è sempre almeno 2.
Calcolo

$$\det C = \begin{vmatrix} h & -1 & 1+h \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-h & -1 \end{vmatrix} = -h-1.$$

Pertanto

$$\det C = 0 \Leftrightarrow h = -1.$$

Concludendo:

$$\begin{aligned} \text{per } h &= -1: \ \dim S = 2 \\ \text{per } h &\neq -1: \ \dim S = 3. \end{aligned}$$

Essendo $f(S)$ un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, esso sarà uguale a quest'ultimo se $\dim f(S) = 3$. E quindi, essendo f un automorfismo (cioè f trasforma basi in basi), questo può accadere solo per $h \neq -1$.
Inoltre

$$S = L(v_1, v_2, v_3) \Rightarrow f(S) = L(f(v_1), f(v_2), f(v_3)).$$

c) Ovviamente per $h = 0$ i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.
Indico con $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$.
Considero la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}'$ alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, cioè

$$P=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Detta B la matrice associata ad f nella base $\mathcal{B}'$, essa è data da

$$B=P^{-1}AP.$$

Quindi

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

d) Ricordo che

$$E_{-2}=\left\{v\in\mathbb{R}^3 \mid (A+2I)\,v=0\right\}.$$

Devo pertanto risolvere

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cioè il sistema

$$\begin{cases} -x+y-z=0 \\ -7x+7y-z=0 \\ -6x+6y=0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$E_{-2}=L\left((1,1,0)\right).$$

Allora

$$E_{-2}^{\perp}=\left\{v\in\mathbb{R}^3 \mid v\perp(1,1,0)\right\}.$$

Quindi

$$v=(x,y,z)\in E_{-2}^{\perp}\Leftrightarrow v\cdot(1,1,0)=0\Leftrightarrow x+y=0.$$

Pertanto

$$E_{-2}^{\perp} = L\left((1,-1,0)\,,(0,1,0)\right).$$

Esercizio 2

Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito come segue

$$\forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (4x+4z, hy+(h+1)z, 4x+(h+1)y+(h+5)z)$$

con h parametro reale.

a) Si scriva la matrice A associata a f nella base canonica, si discuta $\dim Ker\ f$ *al variare di h e si stabilisca per quali valori di h l'endomorfismo è surgettivo.*

b) Nel caso $h=-1$ si determini, se esiste, una matrice P che diagonalizza A e, in caso affermativo, la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che P sia la matrice di passaggio dalla base canonica a $\mathcal{B}$.

Risoluzione:

a) La matrice associata ad f nella base canonica è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & h & h+1 \\ 4 & h+1 & h+5 \end{pmatrix}.$$

Il nucleo di f è dato da

$$Ker\ f = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 0 \right\}.$$

Devo quindi studiare il sistema

$$\begin{cases} 4x+4z=0 \\ hy+(h+1)z=0 \\ 4x+(h+1)y+(h+5)z=0 \end{cases}$$

cioè devo studiare il rango della matrice incompleta di questo sistema, ovvero $rangA$.
Calcolo

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & h & h+1 \\ 4 & h+1 & h+5 \end{vmatrix} = -4h-4.$$

Pertanto

$$\det A = 0 \Leftrightarrow h = -1.$$

Questo significa che

$$\begin{array}{rcl} \text{per } h & \neq & -1 : rangA = 3 \\ \text{per } h & = & -1 : rangA = 2, \end{array}$$

cioè (essendo $Ker\ f$ l'insieme delle soluzioni del sistema)

$$\begin{array}{rcl} \text{per } h & \neq & -1 : \dim Ker\ f = 0 \\ \text{per } h & = & -1 : \dim Ker\ f = 1. \end{array}$$

Quindi per $h \neq -1$ si ha che f è ingettivo e quindi surgettivo.
b) Calcolo gli autovalori di A:

$$\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3.$$

Quindi

$$\det (A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = 8.$$

Poichè ho tre autovalori distinti, la matrice A, e quindi f, è diagonalizzabile.
La matrice diagonale a cui è simile la matrice A è

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calcolando gli autospazi relativi a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 8$ si ottiene che

$$\begin{aligned} E_0 &= Ker\ f = L\left((-1,0,1)\right) \\ E_{-1} &= L\left((0,1,0)\right) \\ E_8 &= L\left((1,0,1)\right). \end{aligned}$$

Pertanto la matrice che diagonalizza A è la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la base richiesta è

$$\mathcal{B} = \left\{(-1,0,1), (0,1,0), (1,0,1)\right\}.$$