

# Esercizi su sottospazi e vettori

## Esercizio 1

Nello spazio vettoriale  $M_2(\mathbb{R})$  siano i dati i sottospazi:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array} \right\} \text{ e } W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x = y, z = -t \right\}.$$

Determinare  $\dim W_1$  e  $\dim W_2$  e una base di uno di essi.

### Risoluzione:

$W_1$  e  $W_2$  sono sottospazi perchè sono gli insiemi delle soluzioni di due sistemi lineari omogenei.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

che ha come matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che  $\text{rang} A = 2$  perchè il minore estratto del secondo ordine

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Pertanto il sistema ammette  $\infty^2$  soluzioni e questo ci dice (per come è definito  $W_1$ ) che  $\dim W_1 = 2$ .

Ora scriviamo  $W_2$  in un altro modo:

$$\begin{aligned} W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x = y, z = -t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -t & t \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x \\ t \end{array} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -t & t \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x \\ t \end{array} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x \\ t \end{array} \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

cioè  $W_2$  è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  e quindi

$$W_2 = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pertanto  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  costituiscono un sistema di generatori di  $W_2$ .

Inoltre

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix}.$$

Cioè i vettori  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  sono linearmente indipendenti e pertanto costituiscono una base di  $W_2$ . E ciò significa che  $\dim W_2 = 2$ .

## Esercizio 2

Dati i vettori  $v_1 = 2e_1 - 2e_2$ ,  $v_2 = e_2 - e_3$ ,  $v_3 = e_1 + 2e_2 - e_3$

a) Stabilire se  $\mathfrak{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .

b) Scrivere l'equazione in forma matriciale del cambiamento di base da quella canonica  $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  alla base  $\mathfrak{B}'$ .

c) Determinare le componenti di  $v = (-1, 2, 1)$  in  $\mathfrak{B}'$ .

### Risoluzione:

a) Data la base canonica  $\mathfrak{B}$ , riscriviamo i vettori  $v_1, v_2, v_3$  come combinazione lineare dei vettori  $e_1, e_2, e_3$

$$\begin{aligned} v_1 &= 2e_1 - 2e_2 + 0e_3 \\ v_2 &= 0e_1 + e_2 - e_3 \\ v_3 &= e_1 + 2e_2 - e_3. \end{aligned}$$

Quindi le componenti dei vettori  $v_1, v_2, v_3$  nella base  $\mathfrak{B}$  sono

$$v_1(2, -2, 0), v_2(0, 1, -1), v_3(1, 2, -1).$$

Per stabilire se  $\mathfrak{B}'$  è una base basta stabilire se i vettori  $v_1, v_2, v_3$  sono linearmente indipendenti perchè sono 3 vettori e la  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ .  
 Consideriamo la matrice avente per colonne le componenti dei vettori  $v_1, v_2, v_3$  nella base  $\mathfrak{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo

$$\det P = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Allora  $\text{rang} P = 3$  e i vettori  $v_1, v_2, v_3$  sono linearmente indipendenti.  
 Pertanto  $\mathfrak{B}'$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .

b) La matrice  $P$ , per definizione, è la matrice di passaggio dalla base  $\mathfrak{B}$  alla base  $\mathfrak{B}'$ .

L'equazione in forma matriciale del cambiamento di base da quella canonica  $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  alla base  $\mathfrak{B}'$  è

$$X = PX',$$

ove  $X$  è la matrice colonna delle componenti di un vettore nella base  $\mathfrak{B}$  e  $X'$  è la matrice colonna delle componenti di un vettore nella base  $\mathfrak{B}'$ .

c) Le componenti di  $v$  in  $\mathfrak{B}'$  si calcolano

$$X' = P^{-1}X,$$

ovvero

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Esercizio 3

Se  $U = L(u_1, u_2)$ , ove  $u_1 = (-1, 0, 1)$  e  $u_2 = (0, 1, 2)$ , stabilire se  $u = (1, -1, 2)$  appartiene a  $U^\perp$ .

**Risoluzione:**

Scriviamo

$$U = L(u_1, u_2) = \left\{ h_1(-1, 0, 1) + h_2(0, 1, 2) \mid \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (-h_1, h_2, h_1 + 2h_2) \mid \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Verifichiamo che  $u_1$  e  $u_2$  sono linearmente indipendenti.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

delle componenti di  $u_1$  e  $u_2$  nella base canonica di  $\mathbb{R}^3$  ha rango 2 perchè da essa possiamo estrarre il minore  $M = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ .

Pertanto  $u_1$  e  $u_2$  sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di  $U$ .

Per stabilire se  $u$  appartiene a  $U^\perp$  basta vedere se  $u$  è ortogonale ai vettori di una qualsiasi base di  $U$ .

Cioè dobbiamo verificare che

$$\begin{aligned} u \perp u_1 &\Leftrightarrow u \cdot u_1 = 0 \\ u \perp u_2 &\Leftrightarrow u \cdot u_2 = 0. \end{aligned}$$

Verifichiamo:

$$\begin{aligned} u \cdot u_1 &= (1, -1, 2) \cdot (-1, 0, 1) = -1 + 2 = 1 \neq 0 \\ u \cdot u_2 &= (1, -1, 2) \cdot (0, 1, 2) = -1 + 4 = 3 \neq 0. \end{aligned}$$

Quindi  $u$  non appartiene a  $U^\perp$ .

Ricordiamo che

$$U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \forall v \in U : v \cdot w = 0\} = \{w = (x, y, z) \mid w \cdot u_1 = 0, w \cdot u_2 = 0\}.$$

Quindi

$$w \in U^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, 1, 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} .$$

Pertanto, risolvendo il sistema ottenuto, si ha che  $\dim U^\perp = 1$  e

$$U^\perp = \{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = L((1, -2, 1)) .$$

#### Esercizio 4

Discutere e risolvere al variare di  $h \in \mathbb{R}$  il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2hy - z = 0 \\ x - y - z = h \\ y + hz = 0 \end{cases} .$$

#### Risoluzione:

Consideriamo la matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2h & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & h \end{pmatrix} .$$

Scegliamo un minore del secondo ordine diverso da zero che non contenga il parametro  $h$ :

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Quindi  $\text{rang} A \geq 2$ .

Orliamo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2h & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & h \end{vmatrix} = -h(1 + 2h) .$$

Da cui

$$\det A = 0 \Leftrightarrow h = 0 \vee h = -\frac{1}{2} .$$

Per  $h \neq 0 \wedge h \neq -\frac{1}{2}$  :  $\text{rang}A = 3$ .

Per  $h = 0 \vee h = -\frac{1}{2}$  :  $\text{rang}A = 2$ .

Consideriamo ora la matrice completa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2h & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & h \\ 0 & 1 & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Per  $h \neq 0 \wedge h \neq -\frac{1}{2}$  :  $\text{rang}A = \text{rang}B = 3$ .

Per  $h = 0$  :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi  $\text{rang}B = 2$ .

Per  $h = -\frac{1}{2}$  :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi  $\text{rang}B = 3$ .

Pertanto:

per  $h \neq 0 \wedge h \neq -\frac{1}{2}$  il sistema ammette un'unica soluzione;

per  $h = 0$  il sistema ammette  $\infty^1$  soluzioni;

per  $h = -\frac{1}{2}$  il sistema è incompatibile.