1 Esercizi sulle matrici

1.1 Rango di matrici

Es.1. *Stabilire il rango della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risoluzione:
La matrice A è una matrice 3×4, quindi $1 \leq rang(A) \leq 3$.
Inoltre il minore estratto del secondo ordine

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

e quindi $rang(A) \geq 2$.
Orliamo:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Pertanto $rang(A) = 3$.

Es.2. *Discutere il rango delle matrici al variare di* $h \in \mathbb{R}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & h \\ h & 2 & 0 \\ 0 & -h & h \end{pmatrix}$, *b)* $A = \begin{pmatrix} 1+h & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1+h & h \\ -2 & -3h+1 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & h & -h & 0 \\ h & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, *d)* $A = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 1 \\ h & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2h \end{pmatrix}$.

Risoluzione:
a) A è una matrice quadrata di ordine 3 e quindi $1 \leq rang(A) \leq 3$.
Calcolo innanzitutto il determinante di A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & h \\ h & 2 & 0 \\ 0 & -h & h \end{vmatrix} = -h \begin{vmatrix} -1 & h \\ -h & h \end{vmatrix} = -h\left(-h+h^2\right) = -h^2\left(h-1\right).$$

Pertanto
$$\det A = 0 \Leftrightarrow h = 0 \vee h = 1.$$

Per $h = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi $rang(A) = 1$.
Per $h = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui, estraendo il minore

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

si ha che $rang(A) = 2$.
Ricapitolando:
Per $h \neq 0$ e $h \neq 1$: $rang(A) = 3$.
Per $h = 0$: $rang(A) = 1$.
Per $h = 1$: $rang(A) = 2$.
b) La matrice A è una matrice 4×3 e quindi $1 \leq rang(A) \leq 3$ per ogni valore di h.
Considero un minore del secondo ordine che non contenga il parametro h

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Allora $rang(A) \geq 2$ per ogni h.
Orliamo:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1+h & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1+h & h \end{vmatrix} = (1+h) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1+h & h \end{vmatrix} = -(1+h)(-1+h),$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1+h & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3h+1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1+h & 2 \\ -2 & -3h+1 \end{vmatrix} = 3h^2 + 2h - 5.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} M_1 &= 0 \Leftrightarrow h = 1 \vee h = -1 \\ M_2 &= 0 \Leftrightarrow h = -\frac{5}{3} \vee h = 1. \end{aligned}$$

Notiamo che i due minori M_1 e M_2 si annullano entrambi per $h = 1$.
Concludendo:

$$\begin{aligned} \text{se } h &\neq 1\text{: } rang(A) = 3 \\ \text{se } h &= 1\text{: } rang(A) = 2. \end{aligned}$$

c) La matrice A è una matrice 3×4 e quindi $1 \leq rang(A) \leq 3$ per ogni valore di h.
Considero un minore del secondo ordine che non contenga il parametro h

$$M = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Allora $rang(A) \geq 2$ per ogni h.
Orliamo:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ h & -h & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ h & 0 \end{vmatrix} = -2h$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -h & 0 \\ h & 2 & 0 \end{vmatrix} = -h \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ h & 0 \end{vmatrix} = -h^2.$$

I minori M_1 e M_2 si annullano entrambi per $h = 0$, pertanto

$$\begin{aligned} \text{se } h &\neq 0\text{: } rang(A) = 3 \\ \text{se } h &= 0\text{: } rang(A) = 2. \end{aligned}$$

d) A è una matrice quadrata di ordine 4 e quindi $1 \leq rang(A) \leq 4$.
Calcolo innanzitutto il determinante di A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & h & 0 & 1 \\ h & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & h & 1 \\ h & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2h \end{vmatrix} = 2h^3 - h - 1.$$

Pertanto

$$\det A = 0 \Leftrightarrow h = 1,$$

cioè $rang(A) = 4$ per $h \neq 1$.
Per $h = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poichè si trova facilmente un minore estratto del terzo ordine

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

si conclude che $rang(A) = 3$ per $h = 1$.

1.2 Matrici ortogonali e matrici simmetriche

Es.1. *Per quale $t \in \mathbb{R}$ è triangolare*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-5t^2 \\ -t^3+t & 0 & 3 \\ t^2-1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Risoluzione:

$$A \text{ è triangolare} \Leftrightarrow -t^3+t=0 \wedge t^2-1=0 \Leftrightarrow t=\pm 1.$$

Es.2. *Per quale $t \in \mathbb{R}$ è simmetrica*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3t-2 & -1 \\ t^2 & 3 & t^2+4 \\ -1 & 4t & 1 \end{pmatrix}.$$

Risoluzione:
Ricordo che

$$A \text{ è simmetrica} \Leftrightarrow A = A^t.$$

Calcolo

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & t^2 & -1 \\ 3t-2 & 3 & 4t \\ -1 & t^2+4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$A \text{ simmetrica} \Leftrightarrow t^2 = 3t-2 \wedge t^2+4=4t \Leftrightarrow t=2.$$

Es.3. *Date*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dire se

$$\exists\ B \in M_3\ \ni' A \cdot B = C.$$

Risoluzione:
Anzitutto

$$\exists\ B \in M_3\ \ni' A \cdot B = C \Leftrightarrow A \text{ è invertibile e } B = A^{-1} \cdot C.$$

Quindi devo stabilire se A è invertibile.
Calcolo

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = -70 \neq 0.$$

Es.4. *Date*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a) stabilire se A è ortogonale e determinare A^{-1};
b) si determini $X \in M_3$ tale che $A \cdot X + 3B = O_3$.

Risoluzione:
a) Ricordo che

$$A \text{ è ortogonale} \Leftrightarrow A \cdot A^t = I = A^t \cdot A.$$

Calcolo

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Verifico che

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cioè A è ortogonale.
Inoltre

$$A^{-1} = A^t.$$

b) Essendo A invertibile perchè ortogonale,

$$A \cdot X + 3B = O_3 \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X + 3A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot O_3 \Leftrightarrow X = -3A^{-1} \cdot B.$$

Calcolo

$$X = -3A^{-1} \cdot B = -3 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 2 & -3 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{9}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Es.5. *Siano $A, B \in M_n$ simmetriche.*
a) $A \cdot B$ è simmetrica?
b) $A + B$ è simmetrica?
c) $A - B$ è simmetrica?

Risoluzione:

a) Per ipotesi

$$\begin{aligned} A \text{ è simmetrica} &\quad \Leftrightarrow \quad A = A^t \\ B \text{ è simmetrica} &\quad \Leftrightarrow \quad B = B^t. \end{aligned}$$

Devo provare che

$$A \cdot B = (A \cdot B)^t .$$

Calcolo

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t = B \cdot A \neq A \cdot B.$$

Quindi $A \cdot B$ non è simmetrica.

b) Devo provare che

$$A + B = (A + B)^t .$$

Calcolo

$$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B.$$

Quindi $A + B$ è simmetrica.

c) Devo provare che

$$A - B = (A - B)^t .$$

Calcolo

$$(A - B)^t = A^t - B^t = A - B.$$

Quindi $A - B$ è simmetrica.

Es.6. *Siano* $A, B \in T_s$. *Provare che*

$$\begin{aligned} \text{a) } A + B &\in T_s; \\ \text{b) } A - B &\in T_s; \\ \text{c) } hA &\in T_s. \end{aligned}$$

Risoluzione:

a) Per ipotesi, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$,

$$\begin{aligned} \forall\ i &> j : a_{ij} = 0, \\ \forall\ i &> j : b_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Allora, sommando membro a membro,

$$\forall\ i > j : a_{ij} + b_{ij} = 0,$$

cioè $A + B \in T_s$, essendo $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

b) Per ipotesi, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$,

$$\begin{aligned} \forall\ i &> j : a_{ij} = 0, \\ \forall\ i &> j : b_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Allora, sottraendo membro a membro,

$$\forall\ i > j : a_{ij} - b_{ij} = 0,$$

cioè $A - B \in T_s$, essendo $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$.

c) Per ipotesi, se $A = (a_{ij})$,

$$\forall\ i > j : a_{ij} = 0.$$

Allora, moltiplicando per h ambo i membri,

$$\forall i > j : ha_{ij} = 0,$$

cioè $hA \in T_s$, essendo $hA = (ha_{ij})$.

Es.7. *Provare che*

$$\begin{aligned} \text{a) } \forall\ A &\in M_n : A + A^t \text{ è simmetrica;} \\ \text{b) } \forall\ A &\in M_n : A - A^t \text{ è emisimmetrica.} \end{aligned}$$

Risoluzione:

a) Sia $A \in M_n$. Devo provare che

$$\left(A + A^t\right)^t = A + A^t.$$

Calcolo

$$\left(A + A^t\right)^t = A^t + \left(A^t\right)^t = A^t + A = A + A^t.$$

Quindi $A + A^t$ è simmetrica.

b) Sia $A \in M_n$. Devo provare che

$$\left(A - A^t\right)^t = -\left(A - A^t\right).$$

Calcolo

$$\left(A - A^t\right)^t = A^t - \left(A^t\right)^t = A^t - A = -\left(A - A^t\right).$$

Quindi $A - A^t$ è emisimmetrica.