Esercizi sulle funzioni reali di 2 variabili reali

1. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita ponendo per ogni* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Stabilire se la funzione f *è continua in* $(0, 0)$.

Risoluzione Calcolo i limiti iterati. Si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0, \\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Ma se calcolo il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ lungo la retta $y = x$ e poi lungo la curva $y = x^2$ ottengo che

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x,x) &= \frac{1}{2}, \lim_{y\to 0} f(y,y) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x\to 0} f\left(x,x^2\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^4} = 0. \end{aligned}$$

Pertanto non esiste il $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, cioè la funzione f non è continua in $(0, 0)$.

2. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *definita ponendo* $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ *per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Calcolare grad* $f(2,-1)$.

Risoluzione La funzione f è derivabile parzialmente rispetto ad x e rispetto ad y in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x}{(x+y)^2} \text{ per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = -2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = -4$. Pertanto *grad* $f(2,-1) = (-2,-4)$.

3. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita ponendo* $f(x,y) = x^2+y^2+1$ *per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Calcolare la derivata di* f *in* $(1,1)$ *lungo la direzione data dal vettore* $v = \left(1, \sqrt{3}\right)$.

Risoluzione Poichè $\|v\| = 2$, la direzione data da v è il vettore $w = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Devo calcolare $\frac{\partial f}{\partial w}(1,1)$. Sia $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) = (1,1)$. Allora $\bar{z} + tw =$

$\left(1+\frac{t}{2}, 1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ con $t \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial w}(1,1) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{z}+tw)-f(\bar{z})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(1+\frac{t}{2}, 1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-f(1,1)}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t^2+\left(1+\sqrt{3}\right)t}{t} = 1+\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

4. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita ponendo* $f(x,y) = |xy|$ *per ogni* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Stabilire se* f *è differenziabile in* $(0,0)$.

Risoluzione Non posso applicare il teorema del differenziale totale perchè $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ non sono continue in $(0,0)$. Pertanto calcolo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-(grad\ f(0,0)|(x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}$.
Essendo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0
\end{aligned}$$

si ha che $grad\ f(0,0) = (0,0)$. Allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-(grad\ f(0,0) \mid (x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Calcolo il limite al secondo membro. Essendo

$$0 \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x|\,|y|}{|x|} = |y| \text{ per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x||y|}{|x|} = 0$, per il teorema della convergenza obbligata si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

e quindi che f è differenziabile in $(0,0)$.