Esercizi su continuità e derivabilità

1. *Determinare i valori del parametro reale α per cui la seguente funzione è continua nel suo dominio*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & se\ x > 0 \\ 2x^2 + 3 & se\ x \le 0 \end{cases} .$$

Risoluzione La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è continua per ogni $x \neq 0$ qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Ora vediamo se la funzione è continua anche in $x = 0$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0} \left(2x^2 + 3\right) = 3 = f(0), \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0} \alpha \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \alpha. \end{aligned}$$

Allora f è continua in $x = 0$ se $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, ovvero se $\alpha = 3$.

2. *Considerata la funzione $f(x) = x + \log x$, verificare che f ha un unico zero nel suo insieme di definizione.*

Risoluzione La funzione f è continua e strettamente crescente nel suo insieme di definizione $X_f =]0, +\infty[$ perchè somma di funzioni continue e strettamente crescenti. Inoltre $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Quindi, per il teorema degli zeri, f ha un unico zero in X_f.

3. *Studiare le soluzioni dell'equazione* $\cos x = x$.

Risoluzione Poichè $-1 \le \cos x \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, sicuramente non avrò soluzioni per $x < -1$ e per $x > 1$. Inoltre non ho soluzioni in $[-1, 0[$ perchè in tale intervallo $\cos x > 0$, mentre $x < 0$. Dunque la soluzioni si troveranno nell'intervallo $[0, 1]$. Consideriamo le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f &: [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{tale che } f(x) = x \qquad \text{per ogni } x \in [0,1], \\ g &: [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{tale che } g(x) = \cos x \quad \text{per ogni } x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Tali funzioni sono continue in $[0, 1]$ e sono tali che $f(0) = 0 < 1 = g(0)$ e $f(1) = 1 > \cos 1 = g(1)$. Pertanto, per il teorema degli zeri, l'equazione $\cos x = x$ ha una soluzione in $]0, 1[$. Inoltre tale soluzione è unica perchè la funzione $h(x) = f(x) - g(x) = x - \cos x$ è strettamente crescente in $[0, 1]$ in quanto in tale intervallo f è strettamente crescente e g è strettamente decrescente.

4. *Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} a \sin 2x - 4 & se\ x < 0 \\ b(x-1) + e^x & se\ x \ge 0 \end{cases}$$

dire per quali valori reali di a e b la funzione f risulta derivabile in $x = 0$.

Risoluzione Impongo prima che la funzione f sia continua in $x = 0$, quindi calcolo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0} (a\sin 2x - 4) = -4 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0} (b(x-1) + e^x) = -b + 1 = f(0)\end{aligned}$$

e impongo che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ ottenendo che affinchè la funzione sia continua in $x = 0$ devo avere che $-b + 1 = 4$, cioè $b = 5$. Ora calcolo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0} 2a\cos 2x = 2a \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0} (b + e^x) = b + 1 = 6.\end{aligned}$$

Affinchè f sia derivabile in $x = 0$ devo avere che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, ovvero che $2a = 6$, quindi $a = 3$. In conclusione, per $a = 3$ e $b = 5$ la funzione f è derivabile in $x = 0$.

5. *Cercare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita ponendo* $f(x) = x^2 + |x - 3|$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Risoluzione La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ ed è sicuramente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ e in tale insieme la sua derivata prima è

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x > 3 \\ 2x - 1 & \text{se } x < 3 \end{cases}.$$

In $x = 3$ la funzione f non è derivabile in quanto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-} f'(x) &= \lim_{x\to 3} (2x - 1) = 5 \\ \lim_{x\to 3^+} f'(x) &= \lim_{x\to 3} (2x + 1) = 7.\end{aligned}$$

Poichè $f'(x) > 0$ in $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\setminus \{3\}$ e $f'(x) < 0$ in $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, si ha che f è strettamente crescente in $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ e strettamente decrescente in $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, pertanto $x = \frac{1}{2}$ è punto di minimo relativo per f e $f(\frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$ è minimo relativo per f. Ma, essendo $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, si ha che f non è limitata superiormente e quindi non ha massimi assoluti, inoltre $x = \frac{1}{2}$ è punto di minimo assoluto per f e $f(\frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$ è il minimo assoluto per f.